Автор: Фильчев Э.Г.

Адрес:Россия.188760.Ленинградская область
Приозерск .ул.Привокзальная 5. кв.60.

Решение кубического уравнения в системе mn параметров

Решение кубического уравнения на основе современных методов не представляется тривиальным. В любом справочнике по математике предлагаются следующие методы
- разложение левой части на линейные множители (если возможно)
- с помощью формулы Кардана
- применение специальных таблиц
  (см. например, И.Н.Бронштейн. К.А.Семендяев. Справочник по математике …М. Наука 1980. стр.219).

В данной статье рассматривается метод решения любых кубических уравнений

включая неприводимый случай формулы Кардана!

Задача "Задано кубическое уравнение вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
Используя формулы системы mn параметров предложить метод определения нулей исходного уравнения ". Пусть а = 1.

Решение

На сайте fgg-fil1.narod.ru/fmat16.doc приведена, полученная автором, формула **mn** преобразования степенной функции. Для кубического уравнения эта формула имеет вид

$$(2mn)^2 + (3x + b)(2mn) + 3x^2 + 2bx + c = 0 \qquad (1)$$

где

x - любой из нулей (корней) исходного уравнения

2mn - разность любой пары из трех нулей исходного уравнения

Решив уравнение (1) относительно x и подставив это значение в исходное уравнение, в результате, после простых, но громоздких преобразований, получим

$$(2mn)^6 + 2(3c – b^2)(2mn)^4 + (3c – b^2)^2(2mn)^2 + [4(3c – b^2)^3 + (2b^3 – 9bc + 27d)^2]/27 = 0 \qquad (2)$$

Это уравнение устанавливает связь коэффициентов исходного уравнения с параметром (2mn) и является кубическим относительно $(2mn)^2$. На основании формул Виета и уравнения (2) можно сделать следующее утверждение

Утверждение1 "Для любого кубического уравнения вида $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ справедливы уравнения

$$3x^2 + 2bx + c = - (2mn)_1(2mn)_2$$

$$2(3c-b^2) = - [(2mn)_1^2+(2mn)_2^2+(2mn)_3^2]$$

$$[4(3c-b^2)^3+(2b^3 - 9bc+27d)^2]/27 = - (2mn)_1^2(2mn)_2^2(2mn)_3^2$$

где $(2mn)_j$ - разность любой пары корней исходного уравнения.

x - один (любой) из корней исходного уравнения. "

1. Для любого кубического уравнения вида $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ определяем значение

$$D_1 = - \frac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27} = - (2mn)_1^2 \cdot (2mn)_2^2 \cdot (2mn)_3^2$$

2. Определяем значение

$$D_2 = - 2(3c – b^2) = - [(2mn)_1^2 + (2mn)_2^2 + (2mn)_3^2]$$

Из этих уравнений следует, что

- **если выражение - 2(3c - b^2) - целое число, то оно разложимо на сумму трех квадратов**
- **и если при этом выполняется равенство $D_1 = -(2mn)_1^2(2mn)_2^2(2mn)_3^2$,**

то в результате получим решение для $(2mn)_1, (2mn)_2, (2mn)_3$.

3. Определяем значение корней исходного уравнения

$$3x^2 + 2bx + c = -(2mn)_1(2mn)_2$$
$$3x^2 + 2bx + c = (2mn)_1(2mn)_2$$
$$3x^2 + 2bx + c = -(2mn)_1(2mn)_3$$
$$3x^2 + 2bx + c = (2mn)_1(2mn)_3$$
$$3x^2 + 2bx + c = -(2mn)_2(2mn)_3$$
$$3x^2 + 2bx + c = (2mn)_2(2mn)_3$$

Задача решена !

Пример 1 Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$$

где a =1, b = - 9, c = 23, d = -15

Решение

1. **Определяем значение** $D_1 = = -\dfrac{4\cdot(3c-b^2)^3+(2\cdot b^3-9bc+27d)^2}{27}$

$\longrightarrow D_1 = -[4(69-81)^3+(-1458+1863-405)^2]/27 = -[4(69-81)^3+0]/27 = 256 = 16^2$

Обратим внимание, что в этом примере $(2b^3-9bc+27d) = 0$

2. **Определяем значение** $D_2 = -2(3c - b^2)$

$\longrightarrow \quad D_2 = -2(3\cdot23 - 81) = 24 = 4 + 16 + 4$

Это единственное разложение числа 24 на три квадрата. Следовательно имеем $(2mn)_1 = 2$, $(2mn)_2 = 4$, $(2mn)_3 = 2$.

3. **Определяем значение нулей (корней) исходного уравнения**

3.1 $3x^2 + 2bx + c = -(2mn)_1(2mn)_2$

$\longrightarrow 3x^2 - 18x + 23 = -2\cdot4 \rightarrow 3x^2 - 18x + 31 = 0$. Нет действительных решений.

3.2 $3x^2 + 2bx + c = (2mn)_1(2mn)_2$

$\longrightarrow 3x^2 - 18x + 23 = 2\cdot4 \rightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \longrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$\longrightarrow \quad X_1 = 3 + 2 = \mathbf{5}$, $X_2 = 3 - 2 = \mathbf{1}$

Здесь X_1 = 5 - одно из решений исходного уравнения.

Здесь X_2 = 1 второе решение исходного уравнения.

3.3 $3x^2 + 2bx + c = -(2mn)_1(2mn)_3$

$\longrightarrow 3x^2 - 18x + 23 = -2\cdot2 \rightarrow 3x^2 - 18x + 27 = 0 \longrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$\longrightarrow X_2 = 3$

Здесь X = 3 - последнее из решений исходного уравнения.

3.4 $3x^2 + 2bx + c = (2mn)_1(2mn)_3$

$\longrightarrow 3x^2 - 18x + 23 = 2\cdot2 \longrightarrow 3x^2 - 18x + 19 = 0$. Нет решений исходного уравнения.

Задача решена!

Пример 2 Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

$$x^3 - 20x^2 + 113x - 154 = 0$$

где a =1, b = - 20, c =113, d = -154

Решение

1. **Определяем значение** $D_1 = -\dfrac{4\cdot(3c-b^2)^3+(2\cdot b^3-9bc+27d)^2}{27}$

$\dashrightarrow D_1 = -[4(339-400)^3+(-16000+20340-4158)^2]/27 = -[-907924+33124]/27 = 32400$

2. Определяем значение $D_2 = -2(3c - b^2)$

$\longrightarrow D_2 = -2(3\cdot 113 - 400) = 122 = 3^2 + 7^2 + 8^2 = 4^2 + 5^2 + 9^2$

Здесь имеет место два представления числа 122 в виде суммы трех квадратов. Поэтому, проверяем на соответствие с числом $D_1 = 32400$.

2.1 $3^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 = 28224 \neq 32400$

2.2 $4^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2 = 32400$. Этот вариант подходит!

$\longrightarrow$ $(2mn)_{11} = 4$, $(2mn)_{12} = -4$,
$(2mn)_{21} = 5$, $(2mn)_{22} = -5$,
$(2mn)_{31} = 9$, $(2mn)_{32} = -9$.

3. Определяем значение нулей (корней) исходного уравнения

3.1 $\mathbf{3x^2 + 2bx + c = -(2mn)_1(2mn)_2}$

$\longrightarrow 3x^2 - 40x + 113 = -4\cdot 5 \to 3x^2 - 40x + 133 = 0.$

$\longrightarrow \mathbf{X_1 = 7}, X_2 = \frac{19}{3}$

4. Таким образом, определен один из корней исходного кубического уравнения $\mathbf{X_1 = 7}$, и кроме того, известны значения $(2mn)_{11} \div (2mn)_{32}$. Этих данных достаточно для определения двух остальных корней.

4.1 Пусть $(2mn)_{11} = 4 = (\mathbf{X_1 - X_2}) \longrightarrow \mathbf{X_2 = X_1} - 4 = 7 - 4 = 3$. Нет решения(это не корень).

4.2 Пусть $(2mn)_{12} = -4 = (\mathbf{X_1 - X_2}) \longrightarrow \mathbf{X_2 = X_1} + 4 = 7 + 4 = \mathbf{11}$. Это второй корень.

4.3 Пусть $(2mn)_{21} = 5 = (\mathbf{X_2 - X_3}) \longrightarrow \mathbf{X_3 = X_2} - 5 = 7 - 5 = \mathbf{2}$. Это третий корень.

Решением исходного уравнения будет $X_1 = \mathbf{7}$, $X_2 = \mathbf{2}$, $X_3 = \mathbf{11}$.

Расчет закончен !

Пример 3 Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

$$x^3 - 10x^2 - 49x + 130 = 0$$

где a =1, b = - 10, c = - 49, d = 130

Решение

1. Определяем значение $D_1 = -\frac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

$\dashrightarrow D_1 = -[4(-147-100)^3+(2000+4410-3510)^2]/27 = -[-60276892+8410000]/27 = \mathbf{1920996}$

2. Определяем значение $D_2 = -2(3c - b^2)$

$\longrightarrow D_2 = -2(-147 - 100) = 494 = 1^2 + 3^2 + 22^2 = 2^2 + 7^2 + 21^2 = \mathbf{7^2 + 11^2 + 18^2}$

Из этих трех вариантов представления числа 494 в виде суммы трех квадратов подходит последний вариант , т.к. $\mathbf{7^2 \cdot 11^2 \cdot 18^2 = 1920996}$

$\longrightarrow$ $(2mn)_{11} = 7$, $(2mn)_{12} = -7$,
$(2mn)_{21} = 11$, $(2mn)_{22} = -11$,
$(2mn)_{31} = 18$, $(2mn)_{32} = -18$.

3. Определяем значение нулей (корней) исходного уравнения

3.1 $\mathbf{3x^2 + 2bx + c = -(2mn)_{11}(2mn)_{21}}$

$\longrightarrow 3x^2 - 20x - 49 = 7\cdot 11 \to 3x^2 - 20x - 126 = 0.$ Эти значения X не подходят!

3.2 $\mathbf{3x^2 + 2bx + c = (2mn)_{11}(2mn)_{22}}$

$\longrightarrow 3x^2 - 20x - 49 = -77 \longrightarrow 3x^2 - 20x + 28 = 0.$

$\longrightarrow X_1 = \frac{14}{3}$, X_2 **= 2 – это один из корней исходного уравнения!**

4. Таким образом, определен один из корней исходного кубического уравнения $\mathbf{X_1 = 2}$, и кроме того, известны значения $(2mn)_{11} \div (2mn)_{32}$. Этих данных достаточно для определения двух остальных корней.

4.1 Пусть $(2mn)_{11}$ = 7 = (X_1 - X_2) -→ X_2 = X_1 – 7 = 2 – 7 **= - 5. Это второй корень!**

4.2 Пусть $(2mn)_{12}$ = - 7 = (X_1 - X_2) -→ X_2 = X_1 +7 = 2 + 7 = 9. Это не корень.

4.3 Пусть $(2mn)_{21}$ = 11 = (X_1 - X_3) -→ X_3 = X_1 - 11= 2 - 11 = - 9. Это не корень.

4.4 Пусть $(2mn)_{21}$ = -11 = (X_1 - X_3) -→ X_3 = X_1 + 11= 2 + 11 **= 13. Это третий корень!**

Решением исходного уравнения будет X_1 **= 2**, X_2 **= - 5,** X_3 **= 13.**

Расчет закончен !

Пример 4 Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

$$x^3 - 6.85x^2 + 13.425x – 8.1 = 0$$

где a =1, b = - 6.85, c = 13.425, d = - 8.1

В этом уравнении имеют место нецелые значения коэффициентов. Это указывает на то, что и корни также могут иметь нецелые значения.

Решение

1. Определяем значение $D_1 = -\dfrac{4\cdot(3c-b^2)^3+(2\cdot b^3-9bc+27d)^2}{27}$

-→D_1 = - [4(40.275 – 46.9225)^3+(- 642.83825 + 827.65125 – 218.7)^2]/27

-→D_1 = - [- 1174.9923236875+1148.328769]/27= 0.987539062500

2. Определяем значение D_2 = - 2(3c - b^2)

-→ D_2 = - 2(40.275 – 46.9225) = 13.2950

В этом случае имеют место дробные значения для D_1 и D_2 . Предлагаемый метод решения куб.уравнения оперирует только с целыми числами, поэтому необходимо умножить на 10^k . При этом значение степени k должно определяться

- для D_2 числом знаков в мантиссе (для данного примера k_2 = 4)
- для D_1 = 3· (число знаков в мантиссе для D_2). -→ k_1 = 3· k_2 (для данного примера k_1 = 12).

Для дальнейшего рассмотрения используем два числа

- D_{11} = 987539062500
- D_{21} = 132950.

3. Далее задача заключается в том, чтобы определить три значения таких целых чисел (А,Б,Д), при которых выполняются равенства $\mathbf{D_{21} = А^2 + Б^2 + Д^2}$ и $\mathbf{D_{11} = А^2 \cdot Б^2 \cdot Д^2}$.

Для нахождения значений чисел А,Б,Д можно использовать две методики

- найти все варианты представления числа D_{21} в виде суммы трех квадратов. При этом один из этих вариантов будет соответствовать условию $\mathbf{D_{21} = А^2 + Б^2 + Д^2}$ и $\mathbf{D_{11} = А^2 \cdot Б^2 \cdot Д^2}$.
- найти все варианты представления числа D_{11} в виде произведения трех квадратов. При этом один из этих вариантов будет соответствовать условию $\mathbf{D_{21} = А^2 + Б^2 + Д^2}$ и $\mathbf{D_{11} = А^2 \cdot Б^2 \cdot Д^2}$.

Вариант $\mathbf{D_{11} = А^2 \cdot Б^2 \cdot Д^2}$ следует считать более удобным.

Для рассматриваемого примера

$$D_{11} = 987539062500 = 250^2 \cdot 265^2 \cdot 15^2$$
$$D_{21} = 132950 = 250^2 + 265^2 + 15^2.$$

4. В расчетах п.2 была произведена операция перехода к целым числам путем умножения соответствующих чисел на множители k_1 и k_2 . Совершая обратную операцию, получим

$(2mn)_{11}$ = 2.5, $(2mn)_{12}$ = - 2.5,
$(2mn)_{21}$ = 2.65, $(2mn)_{22}$ = - 2.65,
$(2mn)_{31}$ = 0.15, $(2mn)_{32}$ = - 0.15.

5. **Определяем значение нулей (корней) исходного уравнения**

5.1 $\mathbf{3x^2 + 2bx + c = - (2mn)_{11}(2mn)_{21}}$

-→ $3x^2$ - 2·(6.85)· x + 13.425 = (2.5)·(2.65) -> $3x^2$ – 13.7x + 6.8 = 0.

-→ X_1 **= 4 – это один из корней исходного уравнения!**

6. Таким образом, определен один из корней исходного кубического уравнения X_1 **= 4,** и кроме того, известны значения $(2mn)_{11}$ ÷ $(2mn)_{32}$. Этих данных достаточно для определения двух остальных корней.

6.1 Пусть $(2mn)_{11}$ = 2.5 = (X_1 - X_2) -→ X_2 = X_1 – 2.5 = 4 – 2.5 **= 1.5 . Это второй корень!**

6.2 Пусть $(2mn)_{12}$ = - 2.5 = (X_1 - X_2) -→ $X_2 = X_1$ +2.5 = 4 + 2.5 = 6.5. Это не корень.

6.3 Пусть $(2mn)_{21}$ = 2.65 = (X_1 - X_3) -→ $X_3 = X_1$ – 2.65= 4 – 2.65 = **1.35**. **Это третий корень!**

Решением исходного уравнения будет X_1 **= 4**, X_2 **= 1.5**, X_3 **= 1.35.**

Расчет закончен !

Неприводимый случай формулы Кардана

Если для кубического уравнения имеет место случай одного действительного и двух мнимых сопряженных корней, то такой вариант называют неприводимым случаем формулы Кардана.

Рассмотрим неприводимый случай формулы Кардана с позиций системы mn параметров.

Задача "Задано кубическое уравнение вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Известно, что нули этого уравнения имеют один действительный и два мнимых сопряженных корня . Используя формулы системы mn параметров предложить метод определения нулей исходного уравнения ".

Пусть a = 1.

Решение

Ранее было показано, что для любого кубического уравнения имеют место формулы

$$D_1 = -(2mn)_1^2 (2mn)_2^2 (2mn)_3^2$$

$$D_2 = -[(2mn)_1^2 + (2mn)_2^2 + (2mn)_3^2],$$

где

- $(2mn)_j$ - разность любой пары корней исходного уравнения
- $D_1 = -\dfrac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$
- $D_2 = -2(3c - b^2)$
- (b,c,d) – коэффициенты исходного уравнения.

По условиям задачи имеем один действительный корень (обозначим его $X_1 = g_1$) и два сопряженных мнимых корня $X_2 = (g_2 - hi)$, $X_3 = (g_2 + hi)$. Тогда

$$(2mn)_1 = (X_1 - X_2) = (g_1 - g_2) + hi$$

$$(2mn)_2 = (X_1 - X_3) = (g_1 - g_2) - hi$$

$$(2mn)_3 = (X_2 - X_3) = g_2 - hi - g_2 - hi = -2hi$$

$$\rightarrow D_1 = -(2mn)_1^2 \cdot (2mn)_2^2 \cdot (2mn)_3^2 = -[(g_1 - g_2) + hi]^2 \cdot [(g_1 - g_2) - hi]^2 \cdot [2hi]^2$$

$$\rightarrow \quad D_1 = [(g_1 - g_2)^2 - (hi)^2]^2 \cdot 4h^2 = [(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 \cdot 4h^2$$

Обратим внимание на то, что в этой формуле в квадратных скобках имеют место

- знак " + "
- только действительные числа.

Таким образом, метод решения поставленной задачи заключается в следующем

1. На основании значений коэффициентов исходного уравнения по формулам

$$D_1 = -\frac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$$

$$D_2 = -2(3c - b^2)$$

определяются значения D_1 и D_2.

2. Определяются **D_1 - как произведение двух квадратов**
D_2 - как удвоенная сумма двух квадратов.

3. Определяются значения **g_1, g_2, h.**

4. Определяются значения $(2mn)_{11}$, $(2mn)_{21}$, $(2mn)_{31}$

5. Определяются значения корней исходного уравнения.

Пример 5 Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

$$x^3 - 9x^2 + 73x - 265 = 0$$

где a =1, b = - 9, c = 73, d = - 265

В этом уравнении имеет место неприводимый случай формулы Кардана.

Решение

1. Определяем значение $D_1 = -\frac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

$\longrightarrow D_1 = -[4(219-81)^3 + (-1458 + 5913 - 7155)^2]/27 = -[10512288 + 7290000]/27 = -659344$

2. Для дальнейших расчетов общий знак " **-** " не имеет значения, поэтому будем рассматривать D_1 как положительную величину.

$\longrightarrow D_1 = \mathbf{[(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 \cdot 4h^2} = 659344 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot7\cdot7\cdot29\cdot29 = 4\cdot2\cdot2\cdot7\cdot7\cdot29\cdot29 = 4\cdot7^2 \cdot 58^2$

Здесь число 659344 представлено в виде всех сомножителей с целью наглядности формирования множителей в соответствии с формулой $\mathbf{[(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 \cdot 4h^2}$. Тогда можно записать

$\mathbf{h = 7}$, $(g_1 - g_2)^2 + h^2 = 58 \longrightarrow (g_1 - g_2)^2 = 58 - 49 = 9 \longrightarrow (g_1 - g_2) = \pm 3$

3. Для определения g_1 и g_2 воспользуемся свойством корней исходного уравнения

$-b = X_1 + X_2 + X_3 \longrightarrow -(-9) = g_1 + g_2 + hi + g_2 - hi = g_1 + 2g_2 \longrightarrow 9 = g_1 + 2g_2$.

4. Теперь, имея два уравнения $(g_1 - g_2) = \pm 3$ и $(g_1 + 2g_2) = 9$, можно определить значения g_1 и g_2

Пусть $(g_1 - g_2) = 3 \longrightarrow g_2 = g_1 - 3 \longrightarrow g_1 + 2(g_1 - 3) = 9 \longrightarrow 3g_1 = 15 \longrightarrow \mathbf{g_1 = 5} \longrightarrow \mathbf{g_2 = 2.}$

$\longrightarrow$ $\mathbf{X_1 = 5,\ X_2 = 2 + 7i,\ X_3 = 2 - 7i}$

Расчет закончен !

Пример 6 Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

$$x^3 - 30x^2 + 322x - 1168 = 0$$

где a =1, b = - 30, c = 322, d = - 1168

В этом уравнении имеет место неприводимый случай формулы Кардана.

Решение

1. Определяем значение $D_1 = -\frac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

$\longrightarrow D_1 = -[4(966-900)^3 + (-54000 + 86940 - 31536)^2]/27 = -[1149984 + 1971216]/27 = -115600$

2. Для дальнейших расчетов общий знак " **-** " не имеет значения, поэтому будем рассматривать D_1 как положительную величину.

$\longrightarrow D_1 = \mathbf{[(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 \cdot 4h^2} = 115600 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot17\cdot17 = 4\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot17\cdot17 = 4\cdot 5^2 \cdot 34^2$

Здесь число 115600 представлено в виде всех сомножителей с целью наглядности формирования множителей в соответствии с формулой $\mathbf{[(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 \cdot 4h^2}$. Тогда можно записать

$\mathbf{h = 5}$, $(g_1 - g_2)^2 + h^2 = 34 \longrightarrow (g_1 - g_2)^2 = 34 - 25 = 9 \longrightarrow (g_1 - g_2) = \pm 3$

3. Для определения g_1 и g_2 воспользуемся свойством корней исходного уравнения

$-b = X_1 + X_2 + X_3 \longrightarrow -(-30) = g_1 + g_2 + hi + g_2 - hi = g_1 + 2g_2 \longrightarrow 30 = g_1 + 2g_2$.

4. Теперь, имея два уравнения $(g_1 - g_2) = \pm 3$ и $(g_1 + 2g_2) = 30$, можно определить значения g_1 и g_2

Пусть $(g_1 - g_2) = -3 \longrightarrow g_2 = g_1 - 3 \longrightarrow g_1 + 2(g_1 - 3) = 30 \longrightarrow 3g_1 = 24 \longrightarrow \mathbf{g_1 = 8} \longrightarrow \mathbf{g_2 = 11.}$

$\longrightarrow$ $\mathbf{X_1 = 8,\ X_2 = 11 + 5i,\ X_3 = 2 - 5i}$

Расчет закончен !

Новый метод решения кубических уравнений

Из анализа результатов вышеприведенных примеров можно предложить новый метод решения кубических уравнений..Для корней кубического уравнения могут иметь место следующие случаи

- три корня имеют одинаковые действительные значения
- три корня имеют действительные значения, при этом два из них являются сопряженными, т.е. если $X_1 = g + h$, то $X_2 = g - h$

или $X_1 = \frac{1}{2}(g + h)$, то $X_2 = \frac{1}{2}(g - h)$, Наличие множителя $\frac{1}{2}$ обусловлено численным значением коэффициента **b** при X для $X^3 + bX^2 + cX + d = (X - X_1)\cdot(X^2 + \mathbf{b}X + \mathbf{c}) = 0$.

- один корень имеет действительное значение, два других- комплексные и сопряженные, т.е. если $X_1 = g + ih$, то $X_2 = g – ih$.

Первый случай – тривиальный . $(x – a)^3 = x^3 – 3ax^2+3a^2x – a^3= 0$. Определение корней для остальных случаев является непростой задачей.

Три разных действительных корня

Пусть имеем один действительный корень (обозначим его $\mathbf{X_1 = g_1}$) и два сопряженных действительных корня. Если исходное уравнение разделить на разность ($X – g_1$), то получим квадратное уравнение вида

$[X – (g_2 + h)]\cdot[X – (g_2 - h)] = 0$

$$\to \quad X^2 – 2g_2X + (g_2^2 – h^2) = 0$$

$$\to \quad \mathbf{X_1 = g_1,\ X_{2,3} = g_2 \pm h \to X_2 = (g_2 - h),\ X_3 = (g_2 + h)}$$

$$\to \quad (2mn)_1 = (X_1 - X_2) = (g_1 - g_2) + h$$

$$(2mn)_2 = (X_1 - X_3) = (g_1 - g_2) – h$$

$$(2mn)_3 = (X_2 - X_3) = g_2 - h - g_2 – h = - 2h$$

$$\to D_1 = - (2mn)_1^2 \cdot (2mn)_2^2 \cdot (2mn)_3^2 = - [(g_1 - g_2) + h]^2 \cdot [(g_1 - g_2) - h]^2 \cdot [2h]^2$$

$$\to \quad D_1 = [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 \cdot 4h^2 \qquad (3)$$

$$\to D_2 = - [(2mn)_1^2 + (2mn)_2^2 + (2mn)_3^2] = - [(g_1 - g_2) + h]^2 + [(g_1 - g_2) - h]^2 + 4h^2$$

$$\to D_2 = - [(g_1 - g_2)^2 + 2(g_1 - g_2)\cdot h + h^2 + (g_1 - g_2)^2 - 2(g_1 - g_2)\cdot h + h^2 + 4h^2]$$

$$\to \quad D_2 = - [2(g_1 - g_2)^2 + 6h^2] = - 2[(g_1 - g_2)^2 +3h^2] \qquad (8)$$

На основании формул системы mn параметров имеем

$$D_1 = - \frac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc+27d)^2}{27} \qquad (4)$$

$$D_2 = - 2(3c - b^2), \qquad (5)$$

где **b,c,d-** коэффициенты исходного кубического уравнения.

Три действительных корня и два одинаковых

Пусть имеем один действительный корень (обозначим его $\mathbf{X_1 = g_1}$) и два равных действительных корня. Тогда имеем $\mathbf{h = 0}$ и $\mathbf{(2mn)_l = 0}$

При $\mathbf{(2mn)_l = 0}$ на основании уравнения (1) будем иметь

$$\mathbf{3x^2 + 2bx + c = 0} \qquad (6)$$

$$\to \quad \mathbf{X_2 = (g_2 - h),\ X_3 = (g_2 + h) \to X_2 = X_3 = g_2}$$

$$\to \quad (2mn)_1 = (X_1 - X_2) = (g_1 - g_2)$$

$$(2mn)_2 = (X_1 - X_3) = (g_1 - g_2)$$

$$(2mn)_3 = (X_2 - X_3) = g_2 - g_2 = 0$$

$$\to \quad D_1 = - (2mn)_1^2 \cdot (2mn)_2^2 \cdot (2mn)_3^2 = 0$$

$$\to \quad D_2 = - [(2mn)_1^2 + (2mn)_2^2 + (2mn)_3^2] = - [(2mn)_1^2 + (2mn)_2^2]$$

$$\to \quad D_2 = 2 (2mn)_1^2 = 2 (g_1 - g_2)^2 = - 2(3c – b^2) = 2(b^2 – 3c)$$

$$\to \quad (g_1 - g_2)^2 = (b^2 - 3c)$$

На основании свойств корней исходного уравнения можно записать $\mathbf{- b = X_1 + 2X_2}$

$$\to \quad \mathbf{g_1 + 2g_2 = - b}$$

Решая систему из двух уравнений будем иметь $\mathbf{g_2 = - \dfrac{b+g_1}{2}}$

$$\to \quad X_{11,12} = g_{11,12} = \tfrac{1}{3}[- b \pm 2\sqrt{b^2 - 3c}]$$

$$\to \quad X_{21,22} = g_{21,22} = \tfrac{1}{3}[- b \pm \sqrt{b^2 - 3c}]$$

Расчет закончен !

Пример 7 Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

$x^3 - 41x^2 + 475x - 1083 = 0$

где a =1, b = - 41, c = 475, d = - 1083

1. $X_{11,12} = g_{11,12} = \frac{1}{3}[- b \pm 2\sqrt{b^2 - 3c}\,] \to X_{11,12} = \frac{1}{3}[41 \pm 2\sqrt{41^2 - 3 \cdot 475}\,] = \frac{1}{3}[41 \pm 2 \cdot 16]$

$\to X_{11} = \frac{73}{3}$, **$X_1 = 3$**

$X_{21,22} = g_{21,22} = \frac{1}{3}[- b \pm \sqrt{b^2 - 3c}\,] \to g_{21,22} = \frac{1}{3}[41 \pm \sqrt{41^2 - 3 \cdot 475}\,] = \frac{1}{3}[41 \pm 16]$

$\to X_{21} = 19$, $X_{22} = \frac{25}{3}$ $\to$ **$X_2 = X_3 = 19$**

Расчет закончен !

<u>Вывод основных формул</u>

Задано исходное уравнение $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Необходимо найти значения корней.

1. Определяем значение $D_1 = - \frac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

2. Разделим $\frac{D_1}{4}$

3. Представляем число $\frac{D_1}{4}$ в виде произведения двух квадратов $\frac{D_1}{4} = [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 \cdot h^2$.

4. Меньший множитель принимаем за $h^2 \to [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 = \frac{D_1}{4h^2}$

$$\to \qquad (g_1 - g_2) = \pm\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} + h^2} \qquad (6)$$

5. Для получения второго уравнения используем свойство корней исходного уравнения

Из исходного уравнения $b = - (X_1 + X_2 + X_3) \to b = - (g_1 + g_2 - h + g_2 + h)$

$$\to \qquad b = - (g_1 + 2g_2) \qquad (7)$$

6. Решая систему из двух уравнений (26) и (27) в итоге получим

$$X_1 = g_1 = \frac{1}{3}\left(\pm 2\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} + h^2} - b\right)$$

$$\to \qquad X_{11} = g_{11} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} + h^2} - b\right) \qquad (8)$$

$$\to \qquad X_{12} = g_{12} = \frac{1}{3}\left(-2\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} + h^2} - b\right) \qquad (9)$$

Таким образом получили значение одного из корней исходного уравнения.

7. $\to$ $g_2 = - \frac{b+g_1}{2}$

$\to$ $g_{21} = - \frac{b+g_{11}}{2}$

$\to$ $g_{22} = - \frac{b+g_{12}}{2}$

8. Определяем два остальных корня

$$X_{21} = g_{21} + h$$
$$X_{22} = g_{22} + h$$
$$X_{31} = g_{21} - h$$
$$X_{32} = g_{22} - h$$

Этими формулами определены по два варианта каждого из трех корней. Среди этих вариантов имеют место и корни исходного кубического уравнения.

Задача решена!

Пример 8 Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

$$x^3 - 33x^2 + 311x - 663 = 0$$

где a =1, b = - 30, c = 322, d = - 1168

Решение

1. Определяем значение $D_1 = -\frac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

$\rightarrow D_1 = -[4(933 - 1089)^3 + (-71874 + 92367 - 17901)^2]/27 = -[-15185664 + 6718464]/27 = 313600$

$\rightarrow D_1 = [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 \cdot 4h^2 = 313600 = 4\cdot 4^2\cdot 7^2\cdot 10^2 = 4\cdot 40^2\cdot 7^2 = 4\cdot 70^2\cdot 4^2 = 4\cdot 28^2\cdot 10^2$

$313600 = 4\cdot 140^2\cdot 2^2 = 4\cdot 7^2\cdot 40^2 = 4\cdot 5^2\cdot 56^2$

$\rightarrow \frac{D_1}{4} = 40^2\cdot 7^2 = 70^2\cdot 4^2 = 28^2\cdot 10^2 = 140^2\cdot 2^2 = 5^2\cdot 56^2$

2. **Пусть** $h_1^2 = 7^2$

$\rightarrow X_1 = g_{11} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} + h^2} - b\right) = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{\frac{\pm\sqrt{313600}}{14} + 7^2} - b\right) = \frac{1}{3}\cdot(\pm 6 + 33)$

$\rightarrow g_{11} = X_{11} = 13,$ $X_{12} = 9.$

$\rightarrow g_{21} = -\frac{b + g_{11}}{2} = -\frac{-33+13}{2} = 10$

$\rightarrow X_{2,3} = g_{21} + h_1 = 10 \pm 7 \rightarrow X_2 = 17,\ X_3 = 3$

Задача решена!

Неприводимый случай формулы Кардана

Пусть имеем один действительный корень (обозначим его $X_1 = g_1$) и два мнимых сопряженных корня

$$X_2 = (g_2 - ih),\ X_3 = (g_2 + ih).$$

$\rightarrow$

$$(2mn)_1 = (X_1 - X_2) = (g_1 - g_2) + ih$$
$$(2mn)_2 = (X_1 - X_3) = (g_1 - g_2) - ih$$
$$(2mn)_3 = (X_2 - X_3) = g_2 - ih - g_2 - ih = -2ih$$

Задано исходное уравнение $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Необходимо найти значения корней.

1. Определяем значение $D_1 = -\frac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$
2. Разделим $\frac{D_1}{4}$
3. Представляем число $\frac{D_1}{4}$ в виде произведения двух квадратов $\frac{D_1}{4} = [(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 \cdot h^2$.
4. Меньший множитель принимаем за $h^2 \rightarrow [(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 = \frac{D_1}{4h^2}$

$\rightarrow (g_1 - g_2) = \pm\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} - h^2}$

5. **Для получения второго уравнения используем свойство корней исходного уравнения**

Из исходного уравнения $b = -(X_1 + X_2 + X_3) \rightarrow b = -(g_1 + g_2 - ih + g_2 + ih)$

$\rightarrow b = -(g_1 + 2g_2)$

6. $$X_1 = g_1 = \frac{1}{3}\left(\pm 2\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} - h^2} - b\right)$$

$\rightarrow X_{11} = g_{11} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} - h^2} - b\right)$

$\rightarrow X_{12} = g_{12} = \frac{1}{3}\left(-2\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} - h^2} - b\right)$

7. → $g_2 = -\frac{b+g_1}{2}$

→ $g_{21} = -\frac{b+g_{11}}{2}$

→ $g_{22} = -\frac{b+g_{12}}{2}$

8. Определяем два остальных корня

$X_{21} = g_{21} + h$

$X_{22} = g_{22} + h$

$X_{31} = g_{21} - h$

$X_{32} = g_{22} - h$

Пример 9 Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

$x^3 - 6x^2 + 58x - 200 = 0$

где a =1, b = - 6, c = 58, d = - 200

Решение

1. Определяем значение $D_1 = -\frac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

-→D_1 = - [4(174 – 36)^3+(- 432 + 3132 – 5400)^2]/27 = - [10512288 + 7290000]/27= 659344

-→ $D_1 = [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 \cdot 4h^2 = 659344 = 4\cdot2^2\cdot7^2\cdot29^2 = 4\cdot14^2\cdot29^2 = 4\cdot7^2\cdot58^2 = 4\cdot2^2\cdot203^2$

-→ $\frac{D_1}{4} = 203^2\cdot2^2 = 58^2\cdot7^2 = 29^2\cdot14^2$

Пусть $h_1^2 = 7^2$

→ $X_1 = g_{11} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{\frac{\sqrt{D_1}}{2h} - h^2} - b\right) = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{\frac{\sqrt{659344}}{14} - 7^2} + 6\right) = \frac{1}{3}\cdot(6 + 6) = 4$

→ $X_1 = 4$

→ $g_{21} = -\frac{b+g_{11}}{2} = -\frac{-6+4}{2} = 1$

→ $X_{2,3} = g_{21} + ih_1 = 1 \pm 7i$ → $X_2 = 1 - 7i$, $X_3 = 1 + 7i$

Задача решена!

Пример 10 **Дано уравнение**

$x^3 - 6x^2 + 21x - 52 = 0$

где a =1, b = - 6, c = 21, d = - 52

Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

Решение

1. Определяем значение $D_1 = -\frac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

-→D_1 = - [4(63 – 36)^3+(- 432 + 1134 – 1404)^2]/27 = - [78732 + 492804]/27= 21168

→ $D_1 = [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 \cdot 4h^2 = 21168 = 4\cdot2^2\cdot7^2\cdot(\sqrt{27})^2 = 4\cdot14^2\cdot(\sqrt{27})^2 = 4\cdot(6\sqrt{3})^2\cdot7^2$

→ $D_1 = 4\cdot21^2\cdot(2\sqrt{3})^2$

Пусть $h_1^2 = (2\sqrt{3})^2$

→ $X_1 = g_{11} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{\frac{\sqrt{D_1}}{2h} - h^2} - b\right) = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{\frac{\sqrt{21168}}{4\cdot\sqrt{3}} - (2\sqrt{3})^2} + 6\right) = \frac{1}{3}\cdot(6 + 6) = 4$

→ $X_1 = 4$

→ $g_{21} = -\frac{b+g_{11}}{2} = -\frac{-6+4}{2} = 1$

→ $X_{2,3} = g_{21} + ih_1 = 1 \pm 2i\sqrt{3}$ → $X_2 = 1 + 2i\sqrt{3}$, $X_3 = 1 - 2i\sqrt{3}$

Сравните метод решения и результат с первоисточником.

[И.Н.Бронштейн. К. А.Семендяев .Справочник по математике. М. Наука.1980. Стр. 220]

Вывод формул

Основные свойства корней квадратного и кубического уравнений выражаются известными формулами Виета. Использование системы mn параметров дает возможность получения новых, ранее неизвестных, формул отражающих свойства корней указанных уравнений.

Рассмотрим кубическое уравнение и проведем анализ формулы (1)

$$(2mn)^2 + (3x + b)(2mn) + 3x^2 + 2bx + c = 0$$

Если в это уравнение подставить значение любого из корней исходного кубического уравнения, то получим $(2mn)^2 + (3x_i + b)(2mn) + 3x_i^2 + 2bx_i + c = 0$

$\rightarrow$ $(2mn)^2 + (3x_1 + b)(2mn) + 3x_1^2 + 2bx_1 + c = 0$

$\rightarrow$ $(2mn)^2 + (3x_2 + b)(2mn) + 3x_2^2 + 2bx_2 + c = 0$

$\rightarrow$ $(2mn)^2 + (3x_3 + b)(2mn) + 3x_3^2 + 2bx_3 + c = 0$

Таким образом, исходное кубическое уравнение распадается на три квадратных уравнения. При этом для каждого положительного значения $(2mn)_i$ **обязательно найдется отрицательное значение $(2mn)_j$. Поэтому общая сумма всех корней вида (2mn) будет равна нулю.**

$\rightarrow$ $(3x_1 + b) + (3x_2 + b) + (3x_3 + b) = 0 \rightarrow 3(x_1 + x_2 + x_3) = -3b$

$\rightarrow$ $(x_1 + x_2 + x_3) = -b.$

Таким образом получили строгое доказательство одного из уравнений Виета.

Рассмотрим любых два уравнения, например,

$\rightarrow$ $(2mn)^2 + (3x_1 + b)(2mn) + 3x_1^2 + 2bx_1 + c = 0$

$(2mn)^2 + (3x_2 + b)(2mn) + 3x_2^2 + 2bx_2 + c = 0.$

Здесь в качестве свободных членов имеем $3x_1^2 + 2bx_1 + c$ **и** $3x_2^2 + 2bx_2 + c$. **Их сумма равна**

$\rightarrow$ $\Sigma = 3(x_1^2 + 3x_2^2) + 2b(x_1 + x_2) + 2c$. **Расчеты показывают, что**

$$3(x_1^2 + x_2^2) + 2b(x_1 + x_2) + 2c = (x_1 - x_2)^2$$

$\rightarrow$ $(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) + c - x_1 \cdot x_2 = 0$

Тогда для трех корней исходного уравнения будем иметь

$\rightarrow$ $(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) + c - x_1 \cdot x_2 = 0$

$\rightarrow$ $(x_1 + x_3)^2 + b(x_1 + x_3) + c - x_1 \cdot x_3 = 0$

$\rightarrow$ $(x_2 + x_3)^2 + b(x_2 + x_3) + c - x_2 \cdot x_3 = 0$

Это новые формулы, отражающие свойства корней исходного кубического уравнения!

В общем случае эта формула имеет вид

$$(x_i + x_j)^2 + b(x_i + x_j) + c - x_i \cdot x_j = 0 \qquad (10)$$

Пример 11 Проверить формулу **(10)**

$$x^3 - 20x^2 + 113x - 154 = 0$$

где a =1, b = - 20, c =113, d = -154

Здесь $X_1 = 7, X_2 = 2, X_3 = 11.$

$\rightarrow (x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) + c - x_1 \cdot x_2 = 0 \rightarrow (7 + 2)^2 - 20(7 + 2) + 113 - 7 \cdot 2 = 0$

$\rightarrow (x_1 + x_3)^2 + b(x_1 + x_3) + c - x_1 \cdot x_3 = 0 \rightarrow (7 + 11)^2 - 20(7 + 11) + 113 - 7 \cdot 11 = 0$

$\rightarrow (x_2 + x_3)^2 + b(x_2 + x_3) + c - x_2 \cdot x_3 = 0 \rightarrow (2 + 11)^2 - 20(2 + 11) + 113 - 2 \cdot 11 = 0$

Расчет подтверждает верность формулы **(10).**

Три действительных корня и два одинаковых

При наличии двух одинаковых корней имеет место нулевая разность, т.е. **(2mn) = 0.**

Тогда из уравнения (2) следует $3x_1^2 + 2bx_1 + c = 0$. **Подставив значения коэффициентов b и c и решив это уравнение получим значение корня- дубля.**

Пример 12 Пусть имеем в качестве исходного уравнение $x^3 - 25x^2 + 203x - 539 = 0$. Необходимо найти решения данного уравнения.

Решение Допустим, что для данного уравнения имеют место два одинаковых корня. Тогда имеем $3x_1^2 + 2bx_1 + c = 0 \rightarrow 3x_1^2 - 50x_1 + 203 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{3}(25 \pm \sqrt{625 - 609}) \rightarrow x_1 = \frac{29}{3}$, $x_2 = 7.$

Подставив значение x = 7 в исходное уравнение, убеждаемся, что это один из корней- дубля исходного уравнения. Определить третий корень исходного уравнения не представляет особого труда. Таким образом, решением заданного исходного уравнения является

$$X_1 = X_2 = 7,\ X_3 = 11$$

Три действительных и одинаковых корня

В этом случае имеем для всех **(2mn) = 0.** Из уравнений (46), (47), (48) получим $3x_1^2 + 2bx_1 + c = 0.$

$\rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1}{3}(-b \pm \sqrt{b^2 - 3c}\ )$. При равенстве трех корней имеем $\sqrt{b^2 - 3c} = 0$

$$\rightarrow \quad x_{1,2,3} = -\frac{b}{3}.$$

Эту формулу можно получить и более просто. На основании формулы Виета

$\rightarrow (x_1 + x_2 + x_3) = -b$. **При** $x = x_1 = x_2 = x_3 \rightarrow 3x = -b \rightarrow x = -\frac{b}{3}.$

Пример 12

Дано уравнение

$x^3 - 24x^2 + 183x - 448 = 0 \rightarrow b = -24,\ c = 183,\ d = -448$

Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

Решение

1. Определяем значение $D_1 = -\frac{4\cdot(3c - b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

$\rightarrow D_1 = -[4(549 - 576)^3 + (-27648 + 39528 - 12096)^2]/27 = -[-78732 + 46656]/27 = 1188$

$\rightarrow \quad 1188 = \mathbf{4\cdot 9\cdot 33} = 4\cdot 36\cdot\frac{33}{4}$

2. Пусть $h^2 = \frac{33}{4}$

$\rightarrow \frac{D_1}{4} = [(g_1 - g_2)^2 - h^2\ ]^2 \cdot h^2 \rightarrow [(g_1 - g_2)^2 + h^2\ ]^2 = 36 \rightarrow [(g_1 - g_2)^2 - h^2\ ] = \pm 6$

$\rightarrow (g_1 - g_2)^2 = -6 + \frac{33}{4} = \frac{9}{4} \rightarrow \quad g_1 - g_2 = \pm\frac{3}{2}.$

Второе уравнение $(x_1 + x_2 + x_3) = -b \rightarrow (g_1 + g_2 + h + g_2 - h) = -b \rightarrow g_1 + 2g_2 = 24$

Таким образом, имеем два уравнения $g_1 - g_2 = \pm\frac{3}{2}$ **и** $g_1 = 24 - 2g_2$.

$\rightarrow 24 - 2g_2 - g_2 = \pm\frac{3}{2} \rightarrow g_2 = \frac{48+3}{6} = \frac{51}{6} \rightarrow g_2 = \frac{17}{2} \rightarrow g_1 = 24 - 2g_2 \rightarrow g_1 = 24 - 17 \rightarrow g_1 = 7$

$$\rightarrow \quad X_1 = 7,\ X_2 = \frac{1}{2}(17 + \sqrt{33}),\ X_3 = \frac{1}{2}(17 - \sqrt{33})$$

Задача решена!

Внимание! В данном примере имеет место множитель $\frac{1}{2}$ **в значениях** X_2 **и** X_3**. Этот случай обусловлен следующим**

1. Разделим исходное уравнение $x^3 - 24x^2 + 183x - 448 = 0$ на $(x - 7)$

$\rightarrow \frac{x^3 - 24x^2 + 183x - 448}{x - 7} = -x^2 + 17x - 64 \rightarrow x^3 - 24x^2 + 183x - 448 = (x - 7)\cdot(x^2 - 17x + 64) = 0.$

2. В уравнении $x^2 - 17x + 64 = 0$ при x имеем нечетный коэффициент равный 17. Поэтому ранее и принято значение $1188 = 4\cdot 36\cdot\frac{33}{4}$.

Новый метод решения кубического уравнения

Новый метод решения кубического уравнения заключается в использовании формул Системы mn параметров.

В общем случае корни кубического уравнения можно записать в виде $X_1 = g_1$ $X_2 = (g_2 + h)$, $X_3 = (g_2 - h)$.

$$\rightarrow \quad (2mn)_1 = (X_1 - X_2) = (g_1 - g_2) - h$$
$$(2mn)_2 = (X_1 - X_3) = (g_1 - g_2) + h$$
$$(2mn)_3 = (X_2 - X_3) = g_2 + h - g_2 + h = 2h$$

Задано исходное уравнение $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Необходимо найти значения корней.

1. Определяем значение $D_1 = -\dfrac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$ (1)
2. Разделим $\dfrac{D_1}{4}$
3. Представляем число $\dfrac{D_1}{4}$ в виде произведения двух квадратов $\dfrac{D_1}{4} = [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 \cdot h^2$
4. Меньший множитель принимаем за $h^2 \rightarrow [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 = \dfrac{D_1}{4h^2}$ (2)

$$\rightarrow \quad (g_1 - g_2) = \pm\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} + h^2} \qquad (3)$$

5. **Для получения второго уравнения используем свойство корней исходного уравнения**
Из исходного уравнения $b = -(X_1 + X_2 + X_3) \rightarrow b = -(g_1 + g_2 + h + g_2 - h)$

$$\rightarrow \quad b = -(g_1 + 2g_2)$$

6. $$X_1 = g_1 = \frac{1}{3}\left(\pm 2\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} - h^2} - b\right)$$

$$\rightarrow \quad X_{11} = g_{11} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} - h^2} - b\right)$$

$$\rightarrow \quad X_{12} = g_{12} = \frac{1}{3}\left(-2\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} - h^2} - b\right)$$

7. $$\rightarrow \quad g_2 = -\frac{b+g_1}{2}$$

$$\rightarrow \quad g_{21} = -\frac{b+g_{11}}{2}$$

$$\rightarrow \quad g_{22} = -\frac{b+g_{12}}{2}$$

8. Определяем два остальных корня

$$X_{21} = g_{21} + h$$
$$X_{22} = g_{22} + h$$
$$X_{31} = g_{21} - h$$
$$X_{32} = g_{22} - h$$

Пример1 Дано уравнение $X^3 - 15X^2 + 71X - 105 = 0$.

Решение a=1, b=-15, c= 71, d= -105

Определяем $D_1 = -\dfrac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

1. $D_1 = -\frac{4\cdot(3\cdot71-15^2)^3+(-6750+9585-2835)^{\ 2}}{27} = -\frac{-6912}{27} = 256 = 2^2\cdot 2^2\cdot 4^2$
2. $D_2 = -2\cdot(3c-b^2) = -2\cdot(213-225) = 24 = 2^2 + 2^2 + 4^2$
3. Определяем $\frac{D_1}{4} = \frac{256}{4} = 64$
4. Определяем множители **64 = 1· 64 = 4 · 16.** Здесь имеем два представления числа 64 в виде произведения двух квадратов.
5. Пусть **64 = 1· 64 .** Принимаем меньший множитель за $h^2 \to h^2 = 1 \to h = \pm 1$

$$\to\ (g_1 - g_2) = \pm\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} + h^2}\ \to (g_1 - g_2) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{256}}{2\cdot1} + 1} = 3$$

6. Определяем $b = -(g_1 + 2g_2) \to 15 = (g_1 + 2g_2) \to g_1 = 15 - 2g_2$
7. $\to$ $(g_1 - g_2) = 15 - 2g_2 - g_2 = 15 - 3g_2 = 3 \to g_2 = 4 \to g_1 = 7.$
8. $X_1 = 7$, $X_2 = g_2 + h = 4 + 1 = 5$, $X_3 = g_2 - h = 4 - 1 = 3$
9. Пусть **64 = 4·16 .** Принимаем меньший множитель за $h^2 \to h^2 = 4 \to h = \pm 2$

$$\to\ (g_1 - g_2) = \pm\sqrt{\frac{\pm\sqrt{D_1}}{2h} + h^2}\ \to (g_1 - g_2) = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{256}}{2\cdot2} + 4} = 0 \to g_1 = g_2$$

10. Определяем $b = -(g_1 + 2g_2) \to 15 = 3g_1 \to g_1 = g_2 = 5$
11. $X_1 = 5$, $X_2 = g_2 + h = 5 + 2 = 7$, $X_3 = g_2 - h = 5 - 2 = 3$

Расчет закончен!

Неприводимый случай формулы Кардана

Если для кубического уравнения имеет место случай одного действительного и двух мнимых сопряженных корней, то такой вариант называют неприводимым случаем формулы Кардана.

Рассмотрим неприводимый случай формулы Кардана с позиций системы mn параметров.

Задача "Задано кубическое уравнение вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Известно, что нули этого уравнения имеют один действительный и два мнимых сопряженных корня . Используя формулы системы mn параметров предложить метод определения нулей исходного уравнения ".

Пусть a = 1.

Решение

Ранее было показано, что для любого кубического уравнения имеют место формулы

$$D_1 = -(2mn)_1{}^2(2mn)_2{}^2(2mn)_3{}^2$$

$$D_2 = -[(2mn)_1{}^2 + (2mn)_2{}^2 + (2mn)_3{}^2],$$

где

- $(2mn)_j$ - разность любой пары корней исходного уравнения
- $D_1 = -\frac{4\cdot(3c-b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$
- $D_2 = -2(3c - b^2)$
- (b,c,d) – коэффициенты исходного уравнения.

По условиям задачи имеем один действительный корень (обозначим его $X_1 = g_1$) и два сопряженных мнимых корня $X_2 = (g_2 - hi)$, $X_3 = (g_2 + hi)$. Тогда

$$(2mn)_1 = (X_1 - X_2) = (g_1 - g_2) + hi$$

$$(2mn)_2 = (X_1 - X_3) = (g_1 - g_2) - hi$$

$$(2mn)_3 = (X_2 - X_3) = g_2 - hi - g_2 - hi = -2hi$$

$$\to D_1 = -(2mn)_1{}^2\cdot(2mn)_2{}^2\cdot(2mn)_3{}^2 = -[(g_1 - g_2) + hi]^2\cdot[(g_1 - g_2) - hi]^2\cdot[2hi]^2$$

$$\to\ D_1 = [(g_1 - g_2)^2 + (hi)^2]^2\cdot 4h^2 = [(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2\cdot 4h^2$$

Обратим внимание на то, что в этой формуле в квадратных скобках имеют место знак " + ".

$$\dashrightarrow \qquad D_1 = [(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 \cdot 4h^2 \qquad (4)$$

В формуле (2) имеем $D_1 = [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 \cdot 4h^2$.

$$\dashrightarrow \qquad (g_1 - g_2) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{D_1}}{2h} - h^2} \qquad (3)$$

Пример

Решить уравнение $X^3 - 17X^2 + 124X - 638 = 0$

Решение **a=1, b=-17, c= 124, d= - 638**

Определяем $D_1 = -\dfrac{4\cdot(3c - b^2)^3 + (2\cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

1. $D_1 = -\dfrac{2287148 + 65286400}{27} = 2502724 = 4\cdot 625681 = 4\cdot 791^2 = 4\cdot 7^2\cdot 113^2$
2. $D_2 = -2\cdot(3c - b^2) = -2\cdot(342 - 289) = 166 =$
3. Определяем $\frac{D_1}{4} = \frac{2502724}{4} = 625681 = 7^2\cdot 113^2 \dashrightarrow h = 7$
4. Определяем $(g_1 - g_2) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{D_1}}{2h} - h^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{2502724}}{14} - 7^2} = \sqrt{113 - 49} = 8 \dashrightarrow g_2 = g_1 - 8$
5. $b = -(g_1 + 2g_2) \to -17 = -3g_1 + 16 \to g_1 = 11 \to g_2 = 11 - 8 = 3.$

$\to X_1 = 11, \; X_{2,3} = 3 \pm 7i$

Автор с благодарностью примет конкретные предложения, замечания и оценки.

E- Mail: fgg-fil1@narod.ru