

Система координат и mп параметры (часть 2)

Ленинградская область г.Приозерск
2011

СОДЕРЖАНИЕ

(часть 1)

АННОТАЦИЯ
ВВЕДЕНИЕ
Глава 1. Базовые основы системы mn параметров и основные соотношения
1.1 Геометрические и аналитические представление mn параметров..	
1.2 Тайна теоремы Пифагора и теорема цикличности в символах и орнаментах.....	
1.3 Последняя теорема Ферма в системе mn параметров	
1.4 Прямоугольный треугольник	
1.5 Косоугольный треугольник в системе mn параметров.....	
1.6 Одно число в системе m n параметров	
1.7 Пара чисел в системе m n параметров	
1.8 Три числа в системе m n параметров	
Глава 2. Упорядоченные множества точек в системе координат.....	
2.1 Упорядоченные множества точек в системе координат.....	
2.2 Методика перемещения точки по кроне дерева ПТ.....	
2.3 Основные свойства дерева упорядоченного множества точек координат.....	
2.4 Методика перехода от иррациональной к рациональной точке....	
2.5 Пифагоровы треугольники в пограничных областях координатной системы.....	

(часть 2)

Глава 3. Практическое использование системы mn параметров.....	
3.1 Египетские пирамиды и mn параметры.....	
3.2 Определения дисперсии данных одиночного эксперимента....	
3.3 Катаболизм и анаболизм точек функции.....	
3.4 Обработка данных геодезических измерений.....	
3.5 Упорядоченное множество кристаллов.....	
Глава 4. Возможности системы mn параметров.....	
4.1 Магистральные направления возможных приращений координат точки	
4.2 Тригонометрические функции в системе mn параметров	
4.3 Новые тригонометрические функции	
4.4 Преобразования степенных функций	
4.5 Золотое сечение	
4.6 Сравнения по модулю	
4.7 Задача определения простых и составных чисел	

- 4.8 Метод решения кубического уравнения.....
- 4.9 Метод решения уравнения Пелля.....
- 4.10 Музыкальный строй в системе mn параметров.....

(часть 3)

Таблица основных пифагоровых треугольников (до 9 уровня).....

(часть 4)

Пакет Mathcad программ системы mn параметров.....

Глава 3

Практическое использование системы mn параметров

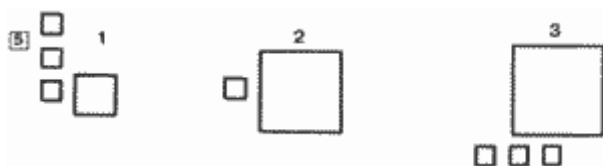
3.1 Египетские пирамиды и mn параметры

В настоящее время нет сведений о том, что древние обладали знаниями современной высшей математики. Поэтому единственными возможными математическими методами можно считать методы основанные на знаниях теории чисел созданы древних пирамид.

Представляет интерес анализ размеров египетских пирамид с основными положениями системы mn параметров.

Если допустить, что главные строители (архитекторы) при создании проектов пирамид использовали систему mn параметров, то в силу вступал главный постулат

“Чем меньше уровень дерева ПТ, на котором находится основной пифагоров треугольник, задающий луч (направление) грани пирамиды, тем прочнее сооружение.“



В расчетах использованы размеры пирамид с сайта <http://www.ufolog.nm.ru/>.

Фрагмент из сайта <http://www.ufolog.nm.ru/>.

Сегодня Пирамида Хеопса (Хуфу) (3) состоит из 203 рядов каменной кладки, имеет высоту 138 м., (первоначально 146.6 метров). Облицовка на Пирамиде Хеопса [не сохранилась](#). верхушка срезана.

На расстоянии примерно 160 метров от пирамиды Хеопса возвышается пирамида Хефрена (Хафры) (2), высота которой 136,6 метра (ранее 143.5), а длина сторон - 210,5 метра. Визуально пирамида Хефрена , сохранившая 22 ряда облицовки, кажется выше пирамиды Хеопса. Эффект достигается за счёт того, что её основание находится на более высокой отметке. Вообще с тех точек на которые возят туристов (включая шоу Пирамид) пирамида Хефрена кажется центром всего ансамбля , хотя это моя личная точка зрения.

Внутренняя структура пирамиды Хафра относительно проста. Две камеры и два входа на северной стороне, один - примерно на высоте 15 метров, другой - под ним, на уровне основания. Сейчас внутрь пирамиды попадают из верхнего входа по коридору, который под самым основанием выравнивается и приводит к погребальной камере. Коридор, ведущий от нижнего входа, сначала опускается на десятиметровую глубину, а после небольшого ровного отрезка снова поднимается и приводит к верхнему коридору; сбоку у него имеется отвод в небольшую камеру, оставшуюся незавершенной. Погребальная камера находится примерно на оси пирамиды, она вытянута с востока на запад на 14,2 метра, с севера на юг - на 5 метров, высота ее - 6,8 метра. Камера вытесана в скале, только сводчатый потолок уходит в каменную массу пирамиды. В этой камере до сих пор стоит пустой саркофаг с разбитой крышкой, обнаруженный Бельцони в 1818 году; сделан саркофаг из прекрасно отшлифованного гранита. Больше в пирамиде нет никаких камер и шахт, туннель Бельцони тоже уже занесен песком. Эта пирамида представляет собой самую компактную постройку на свете: при объеме известняковых блоков 1629200 кубических метров свободное пространство в ней составляет менее 0,01%.

С восточной стороны пирамиды Хефрена, на продолжении ее оси, находится верхний заупокойный храм, имеющий в плане форму вытянутого прямоугольника, занимающий площадь 112 x 50м. Его задняя стена примыкает к стене, окружающей пирамиду. Мы имеем здесь дело со сложившимся типом заупокойного храма эпохи Древнего царства, состоящего из двух основных частей - первое, доступной для верующих и второй, куда допускались лишь избранные.

Пандус, соединявший верхний храм с нижним, при разнице уровней, составлявшей более 45м, имел длину 494м, а ширину 4,5м. Частично высеченный в скале он был выложен внутри плитами известняка, а снаружи гранитом. Первоначально это был по-видимому крытый коридор, освещавшийся через отверстия в потолке. Не исключено также, что его внутренние стены были некогда украшены рельефами.

Одним из наиболее великолепных и хорошо сохранившихся монументальных сооружений Древнего царства является нижний храм Хефрена. Этот храм, имеющий в плане форму квадрата со стороной 4,5м, построен из больших блоков гранита. Его стены имеют легкий наклон и в связи с этим он производит впечатление огромной мастабы, в особенности со стороны фасада. Перед храмом находилась пристань, куда присаливали ладьи, плывущие по каналу со стороны Нила. Два входа в храм стерегли, по-видимому, четыре сфинкса, высеченные из гранита. Посередине храма помещалось нечто вроде помоста, где возможно находилась статуя фараона. От обоих входов отходили узкие коридоры, которые вели в гипос с шестнадцатью монолитными столбами из гранита. В этом зале, имеющем форму перевернутой буквы Т, стояли двадцать три статуи сидящего фараона, выполненные из алебаstra, сланца и диорита. Этот зал, ныне лишенный перекрытия, освещался первоначально с помощью небольших отверстий в потолке, через которые проходил свет, падающий отдельно на каждую статую.

Пирамида Микерина (Менкаура) (1), самая маленькая, расположена в 200 метрах от пирамиды Хефрена. Ее высота 62 метра, а длина сторон - 108.4 метров. Первоначально она была на 4 метра выше, но длину сторон сохранила, ибо наносы песка защитили нижнюю часть ее облицовки. Облицовка эта - из красного асуанского гранита - первоначально покрывала пирамиду почти на треть ее высоты, дальше ее сменяли белые плиты из турецкого известняка, а вершина, по всей вероятности, тоже была красная, гранитная. Такой двухцветной она была еще в 16 веке, пока ее не ограбили мамелюки.

Вначале пирамида имела основание примерно 60х60 метров и только позднее оно было почти вдвое увеличено. Погребальную камеру Менкаура повелел вытесать всего в 6 метрах под основанием; но на следующей фазе строительства опустил ее на более безопасную глубину. Для строительства пирамиды он приказал использовать крупные блоки, по размерам намного большие, чем в пирамидах Хуфу или Хафра. Он хотел ускорить строительство и поэтому не заставлял рабочих тщательно обрабатывать камень. Но, не смотря на спешку, которая чувствуется и через тысячелетия, до окончания строительства пирамиды Менкаура явно не дожился. Вероятно, он умер, когда она достигала примерно двадцатиметровой высоты, т.е. уровня гранитной облицовки.

В отличие от остальных пирамид Менкаура стоит не на скальном основании, а на искусственной террасе из известняковых блоков. Погребальная камера сравнительно мала - всего 6,5х2,3 метра и высотой 3,5 метра. Потолок составлен из двух блоков, снизу вытесанных наподобие полуарки, так что создается впечатление свода. Стены погребальной камеры и входного коридора выложены отшлифованным гранитом, коридор с первоначальной усыпальницей и помещениями для погребальной утвари соединяла лестница. Схема всех этих подземных помещений довольно сложна и отражает по меньшей мере три изменения первоначального архитектурного замысла.

Вход в пирамиду расположен как раз под тем местом, где мамелюки отказались от своих поползновений. Гранитный коридор покрыт слоем песка, за ним - только пустые камеры со спертым воздухом. Саркофаг Менкаура, найденный в 1837 году Визом, ныне лежит на дне океана где-то за мысом Трафальгар. Саркофаг был сделан из базальта и украшен рельефами, изображавшими фасад царского дворца. *Когда британский полковник Говард Венс проник в 1837-м году в погребальную камеру этой пирамиды, он обнаружил там базальтовый саркофаг, деревянную крышку гроба в виде человеческой фигуры и кости. Саркофаг утонул вместе с кораблём перевозившим его в Англию, а датировка крышки гроба и костей отнесла их к эпохе раннего христианства.*

К югу от третьей пирамиды находятся три связанные с нею небольшие пирамиды, окруженные общей стеной. Площадь основания каждой из них по величине равна 1/3 площади основания пирамиды Микерина. Принято считать, что в этих пирамидах были похоронены жены фараона. В одном из помещений, связанных с пирамидой Микерина, американский археолог Райзнер открыл во время раскопок четыре скульптурные группы из сланца, называемые ныне [триадами Микерина](#). Три из них находятся ныне в Каире, одна в Бостоне

Если хотите - можете посмотреть на статуи этих легендарных фараонов. [Хеопс \(Хуфу\)](#), [Хефрен \(Хафра\)](#), [Микерин \(Менкаура\)](#)

Ни в одной из Пирамид не было обнаружено никаких мёртвых тел, только пустые саркофаги.

Задача “Заданы основание и высота пирамиды. Необходимо определить значения наиболее вероятных основных пифагоровых треугольников соответствующих определяющим прямоугольным треугольникам заданной пирамиды.”

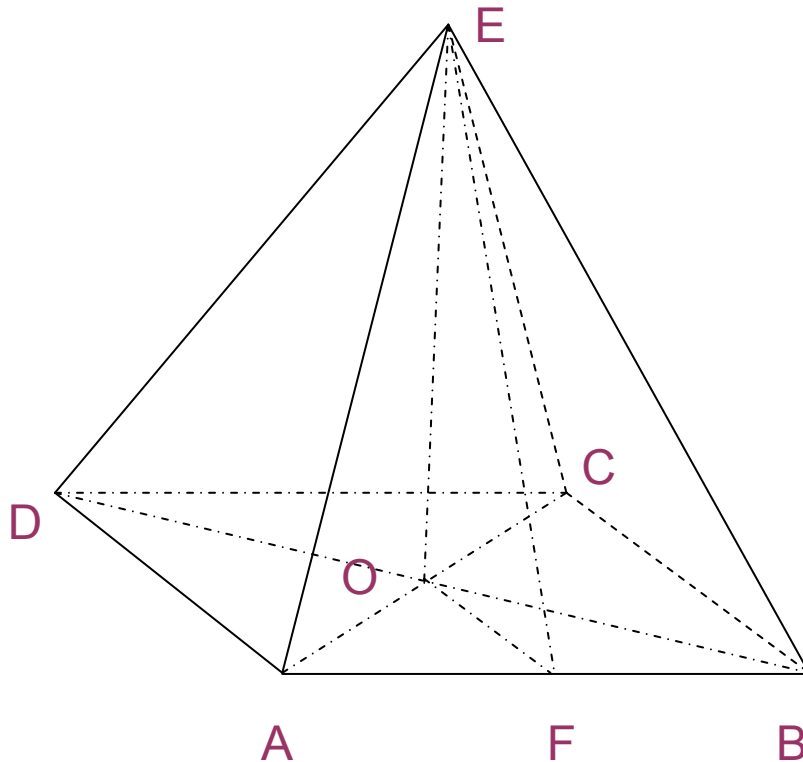


Рис.10 Типовой чертёж пирамиды

Исходные данные: 1. Основание пирамиды $a = AB$ 2. Высота $h = EO$

Расчетные формулы: $AF = \frac{AB}{2}$, $AC = a \cdot \sqrt{2}$, $AO = \frac{AC}{2}$

$$OF = \sqrt{(AO)^2 - (AF)^2}, \quad EF = \sqrt{(EO)^2 + (OF)^2}, \quad AE = \sqrt{(EF)^2 + (AF)^2}$$

Из Рис.10 видно, что пирамида содержит 4 определяющих прямоугольных треугольника ($\triangle AOF$, $\triangle AFE$, $\triangle AOE$, $\triangle FOE$).

Для треугольника AOF введем обозначения $X = AF$, $Y = OF$, $Z = AO$

Для треугольника AFE введем обозначения $X = AF$, $Y = EF$, $Z = AE$

Для треугольника AOE введем обозначения $X = OF$, $Y = OE$, $Z = EF$.

Для треугольника FOE введем обозначения $X = OF$, $Y = OE$, $Z = EF$

Пирамида Хеопса

Исходные данные: 1. Основание пирамиды $a = AB = 233\text{ м}$.

2. Высота $h = EO = 146.6\text{ м}$.

Расчетные формулы: $AF = \frac{AB}{2} = \frac{233}{2} = 116.5$

$$AC = AB \cdot \sqrt{2} = 233 \cdot \sqrt{2} = 329.512$$

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{329.512}{2} = 164.756$$

$$OF = \sqrt{(164.756)^2 - (116.5)^2} = 116.5$$

$$EF = \sqrt{(146.6)^2 + (116.5)^2} = 187.253$$

$$AE = \sqrt{(187.253)^2 + (116.5)^2} = 220.5356$$

$$OE = \sqrt{(220.536)^2 - (164.756)^2} = 146.600$$

Для треугольника AOF $X = AF = 116.5$, $Y = OF = 116.5$, $Z = AO = 164.756 \rightarrow X = Y$

Для треугольника АЕF $X=EF=187.253$ $Y=AF=116.5$, $Z =AE=220.5356$

→ ПТ(187.253, 116.5, 220.5356). **Проведем спуск**

Первая итерация (используем формулы E₄)

$$\rightarrow X_1 = | 2 \cdot (220.5356) - 2 \cdot (187.253) - 116.5 | = 49.935$$

$$\rightarrow Y_1 = | 2 \cdot (220.5356) - 187.253 - 2 \cdot (116.5) | = 20.818$$

$$\rightarrow Z_1 = 3 \cdot (220.5356) - 2 \cdot (187.253) - 2 \cdot (116.5) = 54.100$$

Вторая итерация

$$\rightarrow X_2 = | 2 \cdot (54.1) - 49.935 - 2 \cdot (20.818) | = 16.629$$

$$\rightarrow Y_2 = | 2 \cdot (54.1) - 2 \cdot (49.935) - 20.818 | = 12.488$$

$$\rightarrow Z_2 = 3 \cdot (54.1) - 2 \cdot (49.935) - 2 \cdot (20.818) = 20.796$$

Третья итерация

$$\rightarrow X_3 = | 2 \cdot (20.792) - 2 \cdot (16.634) - 12.475 | = 4.159$$

$$\rightarrow Y_3 = | 2 \cdot (20.792) - 16.634 - 2 \cdot (12.475) | = 0.000$$

$$\rightarrow Z_3 = 3 \cdot (20.792) - 2 \cdot (16.634) - 2 \cdot (12.475) = 4.159$$

В результате итераций спуска имеем ПТ(4.159, 0.000, 4.159). Это означает, что в значениях исходного ПТ(187.253, 116.5, 220.536) имеет место общий множитель

$k_2 = \frac{1}{4.159} = 0.2404$. Для определения основного ПТ, на луче которого находится точка $X = 187.253$, $Y = 116.5$, необходимо эти значения умножить на k .

$$\rightarrow X_{\text{ПТ}} = X \cdot k = (187.253) \cdot (0.2404) = 45.015$$

$$\rightarrow Y_{\text{ПТ}} = Y \cdot k = (116.5) \cdot (0.2404) = 28.006$$

$$\rightarrow Z_{\text{ПТ}} = Z \cdot k = (220.5356) \cdot (0.2404) = 53.016. \quad \text{В итоге получили}$$

$$\text{ПТ}_2(45, 28, 53) \rightarrow \text{уровень 3 дерева ПТ} \rightarrow n^2 = 53 - 28 = 25, 2m^2 = 53 - 45 = 8 \rightarrow n = 5, m = 2.$$

Вывод: Грани пирамиды Хеопса соответствуют ПТ(28,45, 53).

Для треугольника АОЕ $X=AO=164.756$, $Y=OE=146.6$, $Z =AE=220.536$!!!

аналогично получим

$$\rightarrow \text{ПТ}_3(377, 336, 505) \rightarrow \text{уровень 4 дерева ПТ} \rightarrow n^2 = 505 - 336 = 169, 2m^2 = 505 - 377 = 128$$

$$\rightarrow n = 13, m = 8 \rightarrow k_3 = 2.1304$$

Для треугольника EOF $X=OF=116.5$, $Y=OE=146.6$, $Z =EF=187.253$.

$$\rightarrow \text{ПТ}_3(280, 351, 449) \rightarrow \text{уровень 7 дерева ПТ} \rightarrow n^2 = 449 - 280 = 169, 2m^2 = 449 - 351 = 98$$

$$\rightarrow n = 13, m = 7 \rightarrow k_4 = 2.3985$$

Из полученных результатов следует

В геометрии пирамиды Хеопса имеют место три пифагоровых треугольника
 $\text{ПТ}_2(28, 45, 53), \text{ПТ}_3(377, 336, 505), \text{ПТ}_4(351, 280, 449)$.

Основные грани пирамиды соответствуют ПТ(28,45, 53) при $k_2 = 0.2404$.

Пирамида Хефрена (Хафры)

Исходные данные: 1. Основание пирамиды $a_1 = AB = 210.5 \text{ м}$.

2. Высота $h_1 = EO = 143.5 \text{ м}$.

Расчетные формулы:

$$AF = \frac{AB}{2} = \frac{210.5}{2} = 105.25$$

$$AC = AB \cdot \sqrt{2} = (210.5) \cdot \sqrt{2} = 297.692$$

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{297.692}{2} = 148.846$$

$$OF = \sqrt{(148.846)^2 - (105.25)^2} = 105.25$$

$$EF = \sqrt{(143.5)^2 + (105.25)^2} = 177.96$$

$$AE = \sqrt{(177.96)^2 + (105.25)^2} = 206.754$$

$$OE = 143.5$$

Для треугольника **АOF** $X=AF=105.25, Y=OF=105.25, Z=AO=148.846 \rightarrow X=Y$

Для треугольника **АЕF** $X=EF=177.96, Y=AF=105.25, Z=AE=206.754$

\rightarrow ПТ₂(56, 33, 65). $\rightarrow k_2 = 1.1438$. Это третий уровень дерева ПТ.

Вывод: Грани пирамиды Хефрена соответствуют ПТ(56,33, 65).

Для треугольника **АОЕ** $X=AO=148.846, Y=OE=143.5, Z=AE=206.754$

аналогично получим

\rightarrow ПТ₃(1360, 1311, 1889) \rightarrow уровень 5 дерева ПТ $\rightarrow n^2=1889-1360=529,$

$2m^2=1889-1311=578 \rightarrow n=23, m=17 \rightarrow k_3 = 9.1364$

Для треугольника **ЕОF** $X=OF=105.25, Y=OE=143.0, Z=EF=175.15.$

\rightarrow ПТ₃(325, 228, 397) \rightarrow уровень 7 дерева ПТ $\rightarrow n^2=397-228=169, 2m^2=397-325=72$

$\rightarrow n=13, m=6 \rightarrow k_4 = 2.272$

Из полученных результатов следует

В геометрии пирамиды Хефрена имеют место три пифагоровых треугольника

ПТ₂(56,33,65), ПТ₃(1360,1311,1889), ПТ₄(325,228,397).

Основные грани пирамиды соответствуют ПТ(56,33, 65) при $k_2 = 1.1438$.

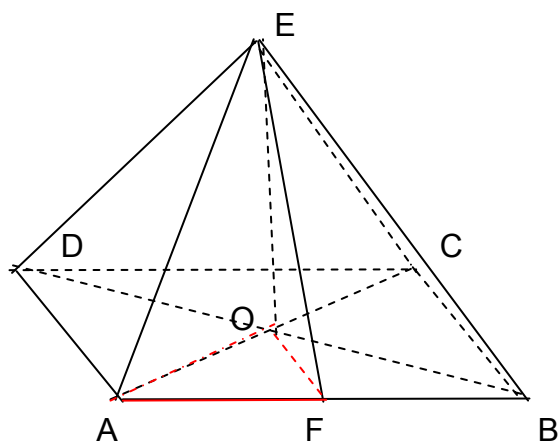


Рис.11а (ΔAOF)

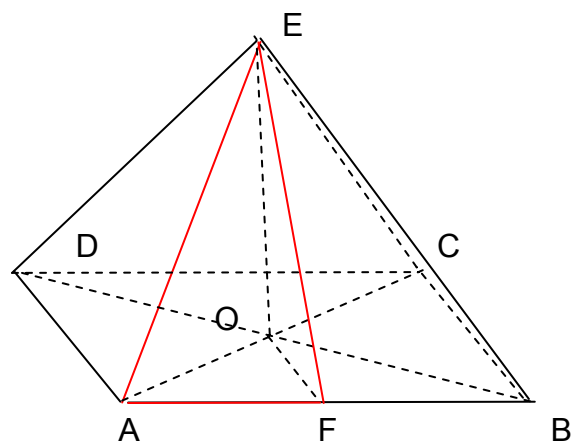


Рис.11b (ΔAEF)

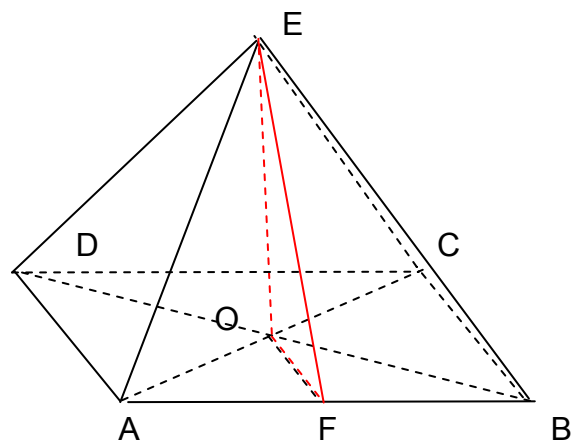
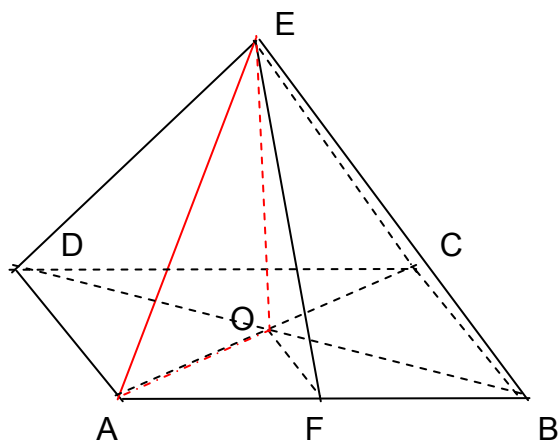


Рис.11с ($\triangle AOE$)Рис.11d ($\triangle FOE$)

Пирамида Микерина (Менкаура)

Исходные данные: 1. Основание пирамиды **$a=AB=108.4\text{м.}$**
2. Высота **$h_1=EO=62\text{м.}$**

Расчетные формулы:

$$AF = \frac{AB}{2} = \frac{108.4}{2} = 54.2$$

$$AC = AB \cdot \sqrt{2} = (108.4) \cdot \sqrt{2} = 153.3$$

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{153.3}{2} = 76.65$$

$$OF = \sqrt{(76.65)^2 - (54.2)^2} = 54.2$$

$$EF = \sqrt{(62)^2 + (54.2)^2} = 82.35$$

$$AE = \sqrt{(82.35)^2 + (54.2)^2} = 98.5858$$

$$OE = 62$$

Для треугольника **АOF** $X=AF=54.2$, $Y=OF=54.2$, $Z=AO=73.8218 \rightarrow X=Y$

Для треугольника **АЕF** $X=EF=82.35$, $Y=AF=54.2$, $Z=AE=98.5858$

\rightarrow ПТ₂(91, 60, 109). $\rightarrow k_2 = 1.1059$. Это четвертый уровень дерева ПТ.

Вывод: Грани пирамиды Хефрена соответствуют ПТ(91, 60, 109).

Для треугольника **АОЕ** $X=AO=76.65$, $Y=OE=62$, $Z=AE=98.5861$

аналогично получим

\rightarrow ПТ₃(253, 204, 325) \rightarrow уровень 6 дерева ПТ $\rightarrow n^2 = 325 - 204 = 121$,

$2m^2 = 325 - 253 = 72 \rightarrow n = 11, m = 6 \rightarrow k_3 = 3.2959$

Для треугольника **ЕOF** $X=OF=54.2$, $Y=OE=62$, $Z=EF=82.35$.

\rightarrow ПТ₃(55, 48, 73) \rightarrow уровень 3 дерева ПТ $\rightarrow n^2 = 73 - 48 = 25$, $2m^2 = 73 - 55 = 18$

$\rightarrow n = 5, m = 3 \rightarrow k_4 = 0.8864$

Из полученных результатов следует

В геометрии пирамиды Хефрена имеют место три пифагоровых треугольника

ПТ₂(91,60,109), ПТ₃(253,204,325), ПТ₄(55,48,73).

Основные грани пирамиды соответствуют ПТ(91,60, 109) при $k_2 = 1.1059$.

Вывод

В статистике о геометрических размерах пирамид Египта имеет место информация с некоторыми разными данными. Это можно объяснить естественными временными разрушениями объектов (особенно высоты). Если принять постулат "Чем меньше уровень дерева ПТ, на котором находится основной пифагоров треугольник, задающий луч (направление) грани пирамиды, тем прочнее сооружение.", то с помощью системы mn параметров можно уточнить высоту конкретной пирамиды. Задача заключается в том, чтобы с помощью программы

“ замена нерациональной точки на рациональную “ определить основной ПТ, расположенным на низком уровне дерева и на луче которого находится вершина исходного треугольника.

Методика уточнения высоты пирамиды

Предлагаемая методика может использоваться для определения значений размеров любой ветхой пирамиды.

На основании исходного $\triangle FOE$ при $h = OE$ и $OF = \frac{AB}{2}$.

1. Определяется значение $\eta = \frac{X}{Y}$, где $X > Y$. Так, если $h > \frac{AB}{2}$, то $X = OE$, $Y = \frac{AB}{2}$.
2. Полученное значение $\eta = \frac{2 \cdot (OE)}{AB}$ используется в программе “ замена нерациональной точки на рациональную “ (см. предыдущий параграф). Данная программа позволяет получить несколько вариантов замены значений X_i, Y_i . Из этих вариантов выбирается ПТ, расположенный на самом низком уровне дерева ПТ. Если полученный результат не подходит по каким – либо причинам, то следует воспользоваться другим источником. При этом, главным при этом выборе следует считать значение высоты h отличающиеся от первого варианта.

3.2 Определения дисперсии данных одиночного эксперимента

Задача. "В результате одиночного эксперимента получена пара X_0, Y_0 . Необходимо определить дисперсию этих исходных данных с целью оптимизации условий проведения подобных последующих экспериментов."

Для решения поставленной задачи требуется массив данных, которого в данном случае нет.

Задача кажется неразрешимой.

Автор предлагает следующую методику

1. Считать X_0, Y_0 координатами точки в прямоугольной системе

координат. Тогда $Z_0 = \sqrt{(X_0)^2 + (Y_0)^2}$

2. В значениях X_0, Y_0 имеют место ошибки обусловленные различными факторами.
3. Значения X_0, Y_0 конкретны и связаны с методикой получения экспериментальных данных.
4. Эксперимент считаем корректным (не имеющим грубых ошибок). При этих условиях, точка $M(X_0, Y_0)$ может иметь отклонения от

реальной исследуемой функции в виде $\Delta X_0, \Delta Y_0$. Суть методики заключается в выборе и обоснованности возможных значений $\Delta X_0, \Delta Y_0$.

В системе mn параметров элементы координатного треугольника, на основании новой теоремы о свойствах сторон треугольника, объективно могут быть представлены в виде восьми вариантов аналитических выражений (см. Таблица 1).

Один из этих вариантов имеет вид

$$X_0 = n^2 + 2mn, Y_0 = 2m^2 + 2mn, Z_0 = n^2 + 2mn + 2m^2$$

т.е. $Z_0 - X_0 = 2m^2$, $Z_0 - Y_0 = n^2$

Для заданных исходных значений X_0, Y_0 могут иметь место три случая

1. Параметры m, n - дробные числа
2. Один из параметров - целое число , второй - дробное число
3. m, n - целые числа, т.е. $Z_0 - X_0 = 2m^2$, $Z_0 - Y_0 = n^2$

Дробные числа Пусть $m = A.bcdes\dots, n = V.rtufg\dots$

где A, V - целые числа

$b, c, d, s, r, t, u, f, g$ - дробные части (числа от 0 до 9)

Для определения массива данных необходимо ограничить число знаков в дробных частях значений m, n и вычислить координаты новой рациональной точки, находящейся в окрестностях исходной точки. В этом и заключается методика образования массива данных необходимого для расчета дисперсии исходных значений X_0, Y_0 .

Пример1 Пусть $X_0 = 15, Y_0 = 19$

1. Вычислим $Z_0 = \sqrt{(X_0)^2 + (Y_0)^2} = \sqrt{15^2 + 19^2} = 24.207$

2. $Z_0 - X_0 = 2m^2 = 24.207 - 15 = 9.207$ $m_0 = 2.145577$

3. $Z_0 - Y_0 = n^2 = 24.207 - 19 = 5.207$, $n_0 = 2.281885$

1 Умножим m_0 и n_0 на 100 и оставим только целую часть, тогда

$$m_{11} = 214, n_{11} = 228, \rightarrow$$

$$X_{11} = n_{11}^2 + 2m_{11}n_{11} = 228^2 + 2 \cdot 214 \cdot 228 = 149568$$

$$Y_{11} = 2m_{11}^2 + 2m_{11}n_{11} = 2 \cdot 214^2 + 2 \cdot 214 \cdot 228 = 189176$$

$$Z_{11} = n_{11}^2 + 2m_{11}n_{11} + 2m_{11}^2 = 228^2 + 2 \cdot 214 \cdot 228 + 2 \cdot 214^2 = 241160$$

$$ПТ_{11} (149568, 189176, 241160)$$

Это не основной ПТ , т.к. его элементы содержат общий множитель равный

$$k = 8$$

Разделив каждый из элементов на 8, получим основной ПТ

$$ПТ (18696, 23647, 39145)$$

$$\rightarrow k_{11} = 8 \times 10^{-4}$$

Умножая каждый из элементов ПТ на " k_{11} " получим координаты рациональной точки, **находящейся на луче основного пифагорова треугольника и в окрестностях исходной точки $M(X_0, Y_0)$.**

2 Пусть $m_{12} = 2145$, $n_{12} = 2281$, тогда

$$X_{12} = n_{12}^2 + 2m_{12}n_{12} = 2281^2 + 2 \cdot 2145 \cdot 2281 = 14988451$$

$$Y_{12} = 2m_{12}^2 + 2m_{12}n_{12} = 2 \cdot 2145^2 + 2 \cdot 2145 \cdot 2281 = 18987540$$

$$Z_{12} = n_{12}^2 + 2m_{12}n_{12} + 2m_{12}^2 = 2281^2 + 2 \cdot 2145 \cdot 2281 + 2 \cdot 2145^2 = 24190501$$

ПТ₁₂ (14988451, 18987540, 24190501)

$$k_{12} = 10^{-6}$$

3 Если принять $m_{13} = 21455$, $n_{13} = 22818$, тогда

$$k_{13} = 10^{-8}$$

и т.д.

Выводы

1. Предлагаемая методика позволяет определить массив рациональных точек, находящихся в окрестностях исходной точки.
2. Выбор таких точек основан на объективности новой теоремы о свойствах сторон треугольника (см. <http://fgg-fil1.narod.ru/index.html>)
3. Размер массива зависит от выбора числа значений m_i , n_i .
4. Программа расчета массива рациональных точек в редакторе MathCat позволяет определить не только дисперсию координат исходной точки, но и вероятностные характеристики.
5. **Предлагаемая методика основана на естественной природе чисел.**

Пример 2 При измерении скорости падения головной части ракеты получены следующие результаты
 $L = 41$, $T = 57.136$

где L - длина измерительной базы головной части

T - время прохождения измерительной базой визирной линии.

Необходимо определить дисперсию полученных значений L и T .

Решение

1. Обозначим $X_0 = 57.136$, $Y_0 = 41 \rightarrow z_0 = \sqrt{(57.136)^2 + (41)^2} = 70.324408$

2. Восемь вариантов значений m , n представлены в таблице 1.

3. Для выбранного варианта формул можно, ограничить значения параметров m , n числом знаков дробной части

- два знака $\rightarrow k = 10^{-4}$

- три знака $\rightarrow k = 10^{-6}$

- четыре знака -> $k=10 - 8$
- пять знаков -> $k=10 - 10$

Тогда общее число рациональных точек в массиве будет равно 32.

ВНИМАНИЕ! Добавим две пары произвольных данных, что необходимо для демонстрации работы программы с массивом исходных данных. Допустим $X_1 = 11, Y_1 = 7, X_2 = 13, Y_2 = 9$. Из этих данных составим матрицу M.

В данном примере имеется только одна пара исходных данных. Программа в общем случае должна быть универсальной и предусматривать обработку нескольких пар исходных данных (например, нескольких точек экспериментальной функции).

Таблица 1

№	0	1	2	3
	$Z+x=2m^2$ $z+y=n^2$	$z-x=2m^2$ $z-y=n^2$	$z+x=2m^2$ $z-y=n^2$	$z-x=2m^2$ $z+y=n^2$
X_0	$2mn-n^2$	n^2+2mn	$2mn-n^2$	n^2-2mn
Y_0	$2mn-2m^2$	$2m^2+2mn$	$2m^2-2mn$	$2mn-2m^2$
Z_0	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$
№	4	5	6	7
	$z+x=n^2$ $z+y=2m^2$	$z-x=n^2$ $z-y=2m^2$	$z+x=n^2$ $z-y=2m^2$	$z-x=n^2$ $z+y=2m^2$
X_0	$2mn-2m^2$	$2m^2+2mn$	$2mn-2m^2$	n^2-2mn
Y_0	$2mn-n^2$	n^2+2mn	n^2+2mn	$2mn-2m^2$
Z_0	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$

Программа

$$M := \begin{pmatrix} 57.136 & 41 & 70.324408 \\ 11 & 7 & 13.038404 \\ 13 & 9 & 15.811388 \end{pmatrix}$$

Вариант 0 Здесь используем формулы варианта 0 таблицы 1

```

M0 :=
  V ← 0
  for h ∈ 0.. rows(M) - 1
    V ←
      Vh,0 ← floor(√0.5 · √(Mh,2 + Mh,0) · 102)
      Vh,1 ← floor(√0.5 · √(Mh,2 + Mh,0) · 103)
      Vh,2 ← floor(√0.5 · √(Mh,2 + Mh,0) · 104)
      Vh,3 ← floor(√0.5 · √(Mh,2 + Mh,0) · 105)
      V
  V

```

Теперь, имея значения m, n, вычислим значения X_j, Y_j, Z_j .

```

NO := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^2$ )
      |       | Vh,1 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^3$ )
      |       | Vh,2 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^4$ )
      |       | Vh,3 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^5$ )
      |       | V
  
```

```

X0:= | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M_{h,0} \cdot N_{h,0} - (N_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |       | Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M_{h,1} \cdot N_{h,1} - (N_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |       | Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M_{h,2} \cdot N_{h,2} - (N_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |       | Vh,3 ←  $\frac{[2 \cdot M_{h,3} \cdot N_{h,3} - (N_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
      |       | V
  
```

$$\begin{array}{l}
 Y0 := \\
 \left. \begin{array}{l}
 V \leftarrow 0 \\
 \text{for } h \in 0.. \text{rows}(M) - 1 \\
 V \leftarrow \begin{array}{l}
 V_{h,0} \leftarrow \frac{[2 \cdot M0_{h,0} \cdot N0_{h,0} - 2(M0_{h,0})^2]}{10^4} \\
 V_{h,1} \leftarrow \frac{[2 \cdot M0_{h,1} \cdot N0_{h,1} - 2(M0_{h,1})^2]}{10^6} \\
 V_{h,2} \leftarrow \frac{[2 \cdot M0_{h,2} \cdot N0_{h,2} - 2(M0_{h,2})^2]}{10^8} \\
 V_{h,3} \leftarrow \frac{[2 \cdot M0_{h,3} \cdot N0_{h,3} - 2(M0_{h,3})^2]}{10^{10}} \\
 V \\
 V
 \end{array}
 \end{array} \right\} V
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 Z0 := \\
 \left. \begin{array}{l}
 V \leftarrow 0 \\
 \text{for } h \in 0.. \text{rows}(M) - 1 \\
 V \leftarrow \begin{array}{l}
 V_{h,0} \leftarrow \frac{[(N0_{h,0})^2 - 2M0_{h,0} \cdot N0_{h,0} + 2(M0_{h,0})^2]}{10^4} \\
 V_{h,1} \leftarrow \frac{[(N0_{h,1})^2 - 2M0_{h,1} \cdot N0_{h,1} + 2(M0_{h,1})^2]}{10^6} \\
 V_{h,2} \leftarrow \frac{[(N0_{h,2})^2 - 2M0_{h,2} \cdot N0_{h,2} + 2(M0_{h,2})^2]}{10^8} \\
 V_{h,3} \leftarrow \frac{[(N0_{h,3})^2 - 2M0_{h,3} \cdot N0_{h,3} + 2(M0_{h,3})^2]}{10^{10}} \\
 V \\
 V
 \end{array}
 \end{array} \right\} V
 \end{array}$$

$$X0 = \begin{pmatrix} 57.0755 & 57.13367 & 57.13578 & 57.13583 \\ 10.9515 & 10.99306 & 10.99941 & 11 \\ 12.948 & 12.99543 & 12.99918 & 12.99997 \end{pmatrix}$$

$$Y0 = \begin{pmatrix} 41.0172 & 41.00069 & 40.9996 & 40.99998 \\ 6.9892 & 7.00132 & 7.00016 & 6.99996 \\ 9.0202 & 9.00174 & 9.00041 & 8.99999 \end{pmatrix} \quad Z0 = \begin{pmatrix} 70.2853 & 70.32291 & 70.324 & 70.32426 \\ 12.9917 & 13.03326 & 13.03799 & 13.03838 \\ 15.7802 & 15.80862 & 15.81095 & 15.81136 \end{pmatrix}$$

В результате для нулевого варианта формул таблицы 1 получили четыре рациональных точки, находящихся в окрестностях исходной точки X_0, Y_0 . К эксперименту относятся только данные первой строки матриц, поэтому произведем их выделение

$$\begin{array}{l}
 A0 := \begin{pmatrix} 57.0755 \\ 57.13367 \\ 57.13578 \\ 57.13583 \end{pmatrix} \quad B0 := \begin{pmatrix} 41.0172 \\ 41.00069 \\ 40.9996 \\ 40.99998 \end{pmatrix} \quad C0 := \begin{pmatrix} 70.2853 \\ 70.32291 \\ 70.324 \\ 70.32426 \end{pmatrix} \\
 D0 := \text{extract}(A0, B0, C0)
 \end{array}$$

X Y Z

$$D0 = \begin{pmatrix} 57.0755 & 41.0172 & 70.2853 \\ 57.13367 & 41.00069 & 70.32291 \\ 57.13578 & 40.9996 & 70.324 \\ 57.13583 & 40.99998 & 70.32426 \end{pmatrix}$$

Вариант 1

Здесь используем формулы варианта 1 таблицы 1

$$M1 := \begin{array}{l} V \leftarrow 0 \\ \text{for } h \in 0.. \text{rows}(M) - 1 \\ \quad V \leftarrow \begin{array}{l} V_{h,0} \leftarrow \text{floor}\left(\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^2\right) \\ V_{h,1} \leftarrow \text{floor}\left(\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^3\right) \\ V_{h,2} \leftarrow \text{floor}\left(\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^4\right) \\ V_{h,3} \leftarrow \text{floor}\left(\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^5\right) \\ V \end{array} \\ V \end{array}$$

$$N1 := \begin{array}{l} V \leftarrow 0 \\ \text{for } h \in 0.. \text{rows}(M) - 1 \\ \quad X1 := \begin{array}{l} V \leftarrow 0 \\ \text{for } h \in 0.. \text{rows}(M) - 1 \\ \quad V \leftarrow \begin{array}{l} V_{h,0} \leftarrow \text{floor}\left(\sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^2\right) \\ V_{h,1} \leftarrow \text{floor}\left(\frac{2 \cdot M_{h,2} \cdot M_{h,1} + (N1_{h,0})^2}{\sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^3}\right) \\ V_{h,2} \leftarrow \text{floor}\left(\frac{2 \cdot M_{h,2} \cdot M_{h,1} + (N1_{h,1})^2}{\sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^4}\right) \\ V_{h,3} \leftarrow \text{floor}\left(\frac{2 \cdot M_{h,2} \cdot M_{h,1} + (N1_{h,2})^2}{\sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^5}\right) \\ V \end{array} \\ V_{h,2} \leftarrow \frac{2 \cdot M1_{h,2} \cdot N1_{h,2} + (N1_{h,2})^2}{10^8} \\ V_{h,3} \leftarrow \frac{2 \cdot M1_{h,3} \cdot N1_{h,3} + (N1_{h,3})^2}{10^{10}} \\ V \end{array} \\ V \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
Y1 := \\
\left| \begin{array}{l}
V \leftarrow 0 \\
\text{for } h \in 0.. \text{rows}(M) - 1 \\
\left| \begin{array}{l}
V \leftarrow \\
V_{h,0} \leftarrow \frac{[2 \cdot M1_{h,0} \cdot N1_{h,0} + 2(M1_{h,0})^2]}{10^4} \\
V_{h,1} \leftarrow \frac{[2 \cdot M1_{h,1} \cdot N1_{h,1} + 2(M1_{h,1})^2]}{10^6} \\
V_{h,2} \leftarrow \frac{[2 \cdot M1_{h,2} \cdot N1_{h,2} + 2(M1_{h,2})^2]}{10^8} \\
V_{h,3} \leftarrow \frac{[2 \cdot M1_{h,3} \cdot N1_{h,3} + 2(M1_{h,3})^2]}{10^{10}} \\
V
\end{array} \right. \\
\left. \right. V
\end{array} \right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
Z1 := \\
\left| \begin{array}{l}
V \leftarrow 0 \\
\text{for } h \in 0.. \text{rows}(M) - 1 \\
\left| \begin{array}{l}
V \leftarrow \\
V_{h,0} \leftarrow \frac{[(N1_{h,0})^2 + 2M1_{h,0} \cdot N1_{h,0} + 2(M1_{h,0})^2]}{10^4} \\
V_{h,1} \leftarrow \frac{[(N1_{h,1})^2 + 2M1_{h,1} \cdot N1_{h,1} + 2(M1_{h,1})^2]}{10^6} \\
V_{h,2} \leftarrow \frac{[(N1_{h,2})^2 + 2M1_{h,2} \cdot N1_{h,2} + 2(M1_{h,2})^2]}{10^8} \\
V_{h,3} \leftarrow \frac{[(N1_{h,3})^2 + 2M1_{h,3} \cdot N1_{h,3} + 2(M1_{h,3})^2]}{10^{10}} \\
V
\end{array} \right. \\
\left. \right. V
\end{array} \right.
\end{array}$$

$$Y1 = \begin{pmatrix} 40.8064 & 40.97959 & 40.9996 & 40.99982 \\ 6.9 & 6.99439 & 6.99947 & 6.99994 \\ 8.9208 & 8.99178 & 8.99965 & 8.99989 \end{pmatrix} \quad Z1 = \begin{pmatrix} 70.0745 & 70.30181 & 70.324 & 70.32421 \\ 12.9025 & 13.03124 & 13.03779 & 13.03831 \\ 15.6808 & 15.79866 & 15.81071 & 15.81126 \end{pmatrix}$$

$$X1 = \begin{pmatrix} 56.9673 & 57.12284 & 57.13578 & 57.13588 \\ 10.9025 & 10.99507 & 10.99961 & 10.99993 \\ 12.896 & 12.99021 & 12.99941 & 12.99992 \end{pmatrix}$$

В результате для первого варианта формул таблицы 1 получили четыре рациональных точки, находящиеся в окрестностях исходной точки X_0, Y_0 . К эксперименту относятся только данные первой строки матриц, поэтому произведем их выделение

$$A1 := (X1^T)^{\langle 0 \rangle} \quad B1 := (Y1^T)^{\langle 0 \rangle} \quad C1 := (Z1^T)^{\langle 0 \rangle}$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 56.9673 \\ 57.12284 \\ 57.13578 \\ 57.13588 \end{pmatrix} \quad B1 = \begin{pmatrix} 40.8064 \\ 40.97959 \\ 40.9996 \\ 40.99982 \end{pmatrix} \quad C1 = \begin{pmatrix} 70.0745 \\ 70.30181 \\ 70.324 \\ 70.32421 \end{pmatrix}$$

$$D1 := \text{augment}(A1, B1, C1)$$

X	Y	Z
56.9673	40.8064	70.0745
57.12284	40.97959	70.30181
57.13578	40.9996	70.324
57.13588	40.99982	70.32421

$$D11 := \text{stack}(D0, D1)$$

$$D11 = \begin{pmatrix} 57.0755 & 41.0172 & 70.2853 \\ 57.13367 & 41.00069 & 70.32291 \\ 57.13578 & 40.9996 & 70.324 \\ 57.13583 & 40.99998 & 70.32426 \\ 56.9673 & 40.8064 & 70.0745 \\ 57.12284 & 40.97959 & 70.30181 \\ 57.13578 & 40.9996 & 70.324 \\ 57.13588 & 40.99982 & 70.32421 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

Здесь используем формулы варианта 2 таблицы 1

```

M2 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} + M_{h,0}} \cdot 10^2$ )
      |         | Vh,1 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} + M_{h,0}} \cdot 10^3$ )
      |         | Vh,2 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} + M_{h,0}} \cdot 10^4$ )
      |         | Vh,3 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} + M_{h,0}} \cdot 10^5$ )
      |         | V
      | V

```

```

N2 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^2$ )
      |         | Vh,1 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^3$ )
      |         | Vh,2 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^4$ )
      |         | Vh,3 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^5$ )
      |         | V
      | V

```

Теперь, имея значения m , n , вычислим значения X_j , Y_j , Z_j .

```

X2:= | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   |
      |   | V_{h,0} ←  $\frac{[2 \cdot M2_{h,0} \cdot N2_{h,0} - (N2_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |   |
      |   | V_{h,1} ←  $\frac{[2 \cdot M2_{h,1} \cdot N2_{h,1} - (N2_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |   |
      |   | V_{h,2} ←  $\frac{[2 \cdot M2_{h,2} \cdot N2_{h,2} - (N2_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |   |
      |   | V_{h,3} ←  $\frac{[2 \cdot M2_{h,3} \cdot N2_{h,3} - (N2_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
      |   |
      |   | V
      |   |
      | V

```

```

Y2 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   |
      |   | V_{h,0} ←  $\frac{[-2 \cdot M2_{h,0} \cdot N2_{h,0} + 2(M2_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |   |
      |   | V_{h,1} ←  $\frac{[-2 \cdot M2_{h,1} \cdot N2_{h,1} + 2(M2_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |   |
      |   | V_{h,2} ←  $\frac{[-2 \cdot M2_{h,2} \cdot N2_{h,2} + 2(M2_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |   |
      |   | V_{h,3} ←  $\frac{[-2 \cdot M2_{h,3} \cdot N2_{h,3} + 2(M2_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
      |   |
      |   | V
      |   |
      | V

```

```

Z2 := V ← 0
for h ∈ 0.. rows(M) - 1
  V ← Vh,0 ←  $\frac{[(N_{h,0})^2 - 2M_{h,0} \cdot N_{h,0} + 2(M_{h,0})^2]}{10^4}$ 
  Vh,1 ←  $\frac{[(N_{h,1})^2 - 2M_{h,1} \cdot N_{h,1} + 2(M_{h,1})^2]}{10^6}$ 
  Vh,2 ←  $\frac{[(N_{h,2})^2 - 2M_{h,2} \cdot N_{h,2} + 2(M_{h,2})^2]}{10^8}$ 
  Vh,3 ←  $\frac{[(N_{h,3})^2 - 2M_{h,3} \cdot N_{h,3} + 2(M_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
  V

```

$$A2 := (X2^T)^{(0)}$$

$$B2 := (Y2^T)^{(0)}$$

$$C2 := (Z2^T)^{(0)}$$

В результате для второго варианта формул таблицы 1 получили четыре рациональных точки, находящиеся в окрестностях исходной точки X_0, Y_0 . К эксперименту относятся только данные первой строки матриц, поэтому произведем их выделение

D2 := augment(A2, B2)

Вариант 3

Здесь используем формулы варианта 3 таблицы 1

```
M3 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^2$ )
      |       | Vh,1 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^3$ )
      |       | Vh,2 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^4$ )
      |       | Vh,3 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^5$ )
      |       | V
      | V
```

```
N3 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^2$ )
      |       | Vh,1 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^3$ )
      |       | Vh,2 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^4$ )
      |       | Vh,3 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^5$ )
      |       | V
      | V
```

Теперь, имея значения m и n , вычислим значения X_j , Y_j , Z_j .

```

X3:= | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ←  $\frac{[-2 \cdot M3_{h,0} \cdot N3_{h,0} + (N3_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |         Vh,1 ←  $\frac{[-2 \cdot M3_{h,1} \cdot N3_{h,1} + (N3_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |         Vh,2 ←  $\frac{[-2 \cdot M3_{h,2} \cdot N3_{h,2} + (N3_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |         Vh,3 ←  $\frac{[-2 \cdot M3_{h,3} \cdot N3_{h,3} + (N3_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
      |         V
      | V

```

```

Y3:= | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M3_{h,0} \cdot N3_{h,0} - 2(M3_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |         Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M3_{h,1} \cdot N3_{h,1} - 2(M3_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |         Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M3_{h,2} \cdot N3_{h,2} - 2(M3_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |         Vh,3 ←  $\frac{[2 \cdot M3_{h,3} \cdot N3_{h,3} - 2(M3_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
      |         V
      | V

```

```

Z3 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ←  $\frac{[(N_{h,0})^2 - 2M_{h,0} \cdot N_{h,0} + 2(M_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |       | Vh,1 ←  $\frac{[(N_{h,1})^2 - 2M_{h,1} \cdot N_{h,1} + 2(M_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |       | Vh,2 ←  $\frac{[(N_{h,2})^2 - 2M_{h,2} \cdot N_{h,2} + 2(M_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |       | Vh,3 ←  $\frac{[(N_{h,3})^2 - 2M_{h,3} \cdot N_{h,3} + 2(M_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
      |       | V
      | V

```

$$A3 := (X3^T)^{\langle 0 \rangle}$$

$$B3 := (Y3^T)^{\langle 0 \rangle}$$

$$C3 := (Z3^T)^{\langle 0 \rangle}$$

В результате для третьего варианта формул таблицы 1 получили четыре рациональных точки, находящиеся в окрестностях исходной точки X_0, Y_0 . К эксперименту относятся только данные первой строки матриц, поэтому произведем их выделение

```
D3 := augment(A3, B3, C3)
```

```
D12 := stack(D2, D3)
```

```
D13 := stack(D11, D12)
```

В матрице D13 имеем 16 рациональных точек, находящихся в окрестностях точки (X_0, Y_0) .

Вариант 4

Здесь используем формулы варианта 2 таблицы 1

```
M4 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^2$ )
      |       | Vh,1 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^3$ )
      |       | Vh,2 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^4$ )
      |       | Vh,3 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^5$ )
      |       | V
```

```
N4 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,0}} \cdot 10^2$ )
      |       | Vh,1 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,0}} \cdot 10^3$ )
      |       | Vh,2 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,0}} \cdot 10^4$ )
      |       | Vh,3 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,0}} \cdot 10^5$ )
      |       | V
```

Теперь, имея значения m и n , вычислим значения X_j , Y_j , Z_j .

```

Y4 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M_{h,0}^4 \cdot N_{h,0}^4 - (N_{h,0}^4)^2]}{10^4}$ 
      |   Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M_{h,1}^4 \cdot N_{h,1}^4 - (N_{h,1}^4)^2]}{10^6}$ 
      |   Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M_{h,2}^4 \cdot N_{h,2}^4 - (N_{h,2}^4)^2]}{10^8}$ 
      |   Vh,3 ←  $\frac{[2 \cdot M_{h,3}^4 \cdot N_{h,3}^4 - (N_{h,3}^4)^2]}{10^{10}}$ 
      |   V

```

```

X4 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M_{h,0}^4 \cdot N_{h,0}^4 - 2(M_{h,0}^4)^2]}{10^4}$ 
      |   Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M_{h,1}^4 \cdot N_{h,1}^4 - 2(M_{h,1}^4)^2]}{10^6}$ 
      |   Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M_{h,2}^4 \cdot N_{h,2}^4 - 2(M_{h,2}^4)^2]}{10^8}$ 
      |   Vh,3 ←  $\frac{[2 \cdot M_{h,3}^4 \cdot N_{h,3}^4 - 2(M_{h,3}^4)^2]}{10^{10}}$ 
      |   V

```

```

Z4 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ←  $\frac{[(N_{h,0})^2 - 2M_{h,0} \cdot N_{h,0} + 2(M_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |       | Vh,1 ←  $\frac{[(N_{h,1})^2 - 2M_{h,1} \cdot N_{h,1} + 2(M_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |       | Vh,2 ←  $\frac{[(N_{h,2})^2 - 2M_{h,2} \cdot N_{h,2} + 2(M_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |       | Vh,3 ←  $\frac{[(N_{h,3})^2 - 2M_{h,3} \cdot N_{h,3} + 2(M_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
      |       | V
  
```

$$A4 := (X4^T)^{\langle 0 \rangle}$$

$$B4 := (Y4^T)^{\langle 0 \rangle}$$

$$C4 := (Z4^T)^{\langle 0 \rangle}$$

В результате, для второго варианта формул таблицы 1, получили четыре рациональных точки, находящиеся в окрестностях исходной точки X_0, Y_0 . К эксперименту относятся только данные первой строки матриц, поэтому произведем их выделение

$$D4 := \text{augment}(A4, B4, C4)$$

Вариант 5

Здесь используем формулы варианта 5 таблицы 1

```
M5 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^2$ )
      |       | Vh,1 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^3$ )
      |       | Vh,2 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^4$ )
      |       | Vh,3 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^5$ )
      |       | V
      | V
```

```
N5 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^2$ )
      |       | Vh,1 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^3$ )
      |       | Vh,2 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^4$ )
      |       | Vh,3 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^5$ )
      |       | V
      | V
```

Теперь, имея значения m и n , вычислим значения X_j , Y_j , Z_j .

```

Y5 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M5_{h,0} \cdot N5_{h,0} + (N5_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |   Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M5_{h,1} \cdot N5_{h,1} + (N5_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |   Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M5_{h,2} \cdot N5_{h,2} + (N5_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |   Vh,3 ←  $\frac{[2 \cdot M5_{h,3} \cdot N5_{h,3} + (N5_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
      |   V
      | V

```

```

X5 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M5_{h,0} \cdot N5_{h,0} + 2(M5_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |   Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M5_{h,1} \cdot N5_{h,1} + 2(M5_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |   Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M5_{h,2} \cdot N5_{h,2} + 2(M5_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |   Vh,3 ←  $\frac{[2 \cdot M5_{h,3} \cdot N5_{h,3} + 2(M5_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
      |   V
      | V

```

```

Z5 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ←  $\frac{[(N_{5,h,0})^2 + 2M_{5,h,0} \cdot N_{5,h,0} + 2(M_{5,h,0})^2]}{10^4}$ 
      |       | Vh,1 ←  $\frac{[(N_{5,h,1})^2 + 2M_{5,h,1} \cdot N_{5,h,1} + 2(M_{5,h,1})^2]}{10^6}$ 
      |       | Vh,2 ←  $\frac{[(N_{5,h,2})^2 + 2M_{5,h,2} \cdot N_{5,h,2} + 2(M_{5,h,2})^2]}{10^8}$ 
      |       | Vh,3 ←  $\frac{[(N_{5,h,3})^2 + 2M_{5,h,3} \cdot N_{5,h,3} + 2(M_{5,h,3})^2]}{10^{10}}$ 
      |       | V
      | V

```

$$A5 := (X5^T)^{\langle 0 \rangle}$$

$$B5 := (Y5^T)^{\langle 0 \rangle}$$

$$C5 := (Z5^T)^{\langle 0 \rangle}$$

В результате для третьего варианта формул таблицы 1 получили четыре рациональных точки, находящиеся в окрестностях исходной точки X_0, Y_0 . К эксперименту относятся только данные первой строки матриц, поэтому произведем их выделение

D5 := augment(A5, B5, C5)

D14 := stack(D4, D5)

В матрице D14 имеем 8 рациональных точек, находящихся в окрестностях точки (X_0, Y_0) .

Вариант 6

Здесь используем формулы варианта 2 таблицы 1

```
M6 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^2$ )
      |       | Vh,1 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^3$ )
      |       | Vh,2 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^4$ )
      |       | Vh,3 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} - M_{h,1}} \cdot 10^5$ )
      |       | V
```

```
N6 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,0}} \cdot 10^2$ )
      |       | Vh,1 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,0}} \cdot 10^3$ )
      |       | Vh,2 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,0}} \cdot 10^4$ )
      |       | Vh,3 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} + M_{h,0}} \cdot 10^5$ )
      |       | V
```

Теперь, имея значения m и n , вычислим значения X_j , Y_j , Z_j .

```

Y6 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ←  $\frac{[-2 \cdot M6_{h,0} \cdot N6_{h,0} + (N6_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |       | Vh,1 ←  $\frac{[-2 \cdot M6_{h,1} \cdot N6_{h,1} + (N6_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |       | Vh,2 ←  $\frac{[-2 \cdot M6_{h,2} \cdot N6_{h,2} + (N6_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |       | Vh,3 ←  $\frac{[-2 \cdot M6_{h,3} \cdot N6_{h,3} + (N6_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
      |       | V
      | V

```

```

X6 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M6_{h,0} \cdot N6_{h,0} - 2(M6_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |       | Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M6_{h,1} \cdot N6_{h,1} - 2(M6_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |       | Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M6_{h,2} \cdot N6_{h,2} - 2(M6_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |       | Vh,3 ←  $\frac{[2 \cdot M6_{h,3} \cdot N6_{h,3} - 2(M6_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
      |       | V
      | V

```



```

Z6 := V ← 0
for h ∈ 0.. rows(M) - 1
  V ← Vh,0 ←  $\frac{[(N_{6,h,0})^2 - 2M_{6,h,0} \cdot N_{6,h,0} + 2(M_{6,h,0})^2]}{10^4}$ 
  Vh,1 ←  $\frac{[(N_{6,h,1})^2 - 2M_{6,h,1} \cdot N_{6,h,1} + 2(M_{6,h,1})^2]}{10^6}$ 
  Vh,2 ←  $\frac{[(N_{6,h,2})^2 - 2M_{6,h,2} \cdot N_{6,h,2} + 2(M_{6,h,2})^2]}{10^8}$ 
  Vh,3 ←  $\frac{[(N_{6,h,3})^2 - 2M_{6,h,3} \cdot N_{6,h,3} + 2(M_{6,h,3})^2]}{10^{10}}$ 
  V
V

```

$$A6 := (x6^T)^{(0)}$$

$$B6 := (y6^T)^{(0)}$$

$$C6 := (z6^T)^{(0)}$$

В результате для второго варианта формул таблицы 1 получили четыре рациональных точки, находящиеся в окрестностях исходной точки X_0, Y_0 . К эксперименту относятся только данные первой строки матриц, поэтому произведем их выделение

D6 := augment(A6, B6, C6)

Вариант 7

Здесь используем формулы варианта 7 таблицы 1

```
M7 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^2$ )
      |       | Vh,1 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^3$ )
      |       | Vh,2 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^4$ )
      |       | Vh,3 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{M_{h,2} + M_{h,1}} \cdot 10^5$ )
      |       | V
      | V
```

```
N7 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^2$ )
      |       | Vh,1 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^3$ )
      |       | Vh,2 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^4$ )
      |       | Vh,3 ← floor( $\sqrt{M_{h,2} - M_{h,0}} \cdot 10^5$ )
      |       | V
      | V
```

Теперь, имея значения m , n , вычислим значения X_j , Y_j , Z_j .

```

X7 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ←  $\frac{[-2 \cdot M3_{h,0} \cdot N3_{h,0} + (N3_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |       | Vh,1 ←  $\frac{[-2 \cdot M3_{h,1} \cdot N3_{h,1} + (N3_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |       | Vh,2 ←  $\frac{[-2 \cdot M3_{h,2} \cdot N3_{h,2} + (N3_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |       | Vh,3 ←  $\frac{[-2 \cdot M3_{h,3} \cdot N3_{h,3} + (N3_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
      |       | V
      | V

```

```

Y7 := | V ← 0
      | for h ∈ 0.. rows(M) - 1
      |   V ← | Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M3_{h,0} \cdot N3_{h,0} - 2(M3_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |       | Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M3_{h,1} \cdot N3_{h,1} - 2(M3_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |       | Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M3_{h,2} \cdot N3_{h,2} - 2(M3_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |       | Vh,3 ←  $\frac{[2 \cdot M3_{h,3} \cdot N3_{h,3} - 2(M3_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
      |       | V
      | V

```

```

Z7 := V ← 0
for h ∈ 0.. rows(M) - 1
  V ← Vh,0 ←  $\frac{[(N7_{h,0})^2 - 2M7_{h,0} \cdot N7_{h,0} + 2(M7_{h,0})^2]}{10^4}$ 
  Vh,1 ←  $\frac{[(N7_{h,1})^2 - 2M7_{h,1} \cdot N7_{h,1} + 2(M7_{h,1})^2]}{10^6}$ 
  Vh,2 ←  $\frac{[(N7_{h,2})^2 - 2M7_{h,2} \cdot N7_{h,2} + 2(M7_{h,2})^2]}{10^8}$ 
  Vh,3 ←  $\frac{[(N7_{h,3})^2 - 2M7_{h,3} \cdot N7_{h,3} + 2(M7_{h,3})^2]}{10^{10}}$ 
  V
V
A7 := (X7T)(0)      B7 := (Y7T)(0)      C7 := (Z7T)(0)

```

В результате для седьмого варианта формул таблицы 1 получили четыре рациональных точки, находящиеся в окрестностях исходной точки X_0, Y_0 . К эксперименту относятся только данные первой строки матриц, поэтому произведем их выделение

D7 := augment(A7, B7, C7) D15 := stack(D6, D7) D16 := stack(D14, D15)

В матрице D16 имеем 16 рациональных точек, находящихся в окрестностях точки (X_0, Y_0) .

D17 := stack(D13, D16)

Матрица D17 содержит координаты 32 точек, находящихся в окрестностях точки (X_0, Y_0) . Определим дисперсию каждого из элементов координатного треугольника исходной точки $M(X_0, Y_0)$. **Задача решена.**

Дисперсия

X_0	Y_0	Z_0
$\text{var}(D17^{(0)}) = 0.00506$	$\text{var}(D17^{(1)}) = 0.00206$	$\text{var}(D17^{(2)}) = 0.00378$

Выводы

1. Использование системы m параметров позволяет создать массив точек, находящихся в непосредственной близости к исходной точке. Размер массива зависит от выбора числа значений рациональных точек.
2. Вычисление дисперсии производится с помощью оператора `var()`.
3. Наличие массива данных позволяет в MathCad построить графики и получить различные статистические расчеты.
4. В системе m параметров все статистические характеристики являются объективными и обусловлены природой чисел в системе координат.
5. При проведении одиночного эксперимента необходимо планировать выход в точку измерений, находящуюся на луче основного ПТ.

D17 =

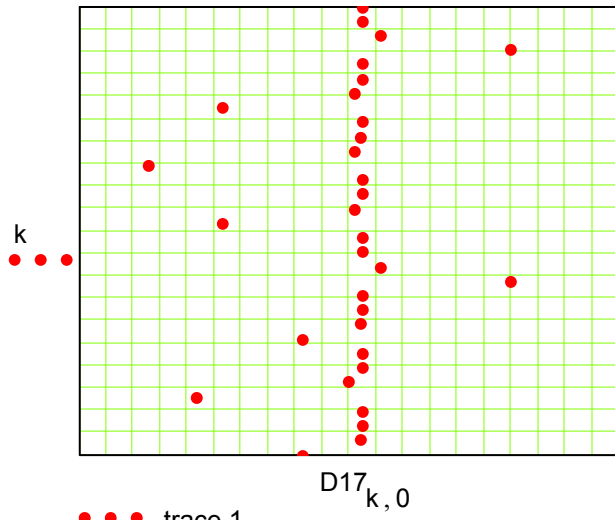
	0	1	2
0	57.0755	41.0172	70.2853
1	57.13367	41.00069	70.32291
2	57.13578	40.9996	70.324
3	57.13583	40.99998	70.32426
4	56.9673	40.8064	70.0745
5	57.12284	40.97959	70.30181
6	57.13578	40.9996	70.324
7	57.13588	40.99982	70.32421
8	57.0755	41.0172	70.2853
9	57.13367	41.00069	70.32291
10	57.13578	40.9996	70.324
11	57.13588	40.99982	70.32421
12	57.2865	40.9088	70.3937
13	57.15477	40.98986	70.33374
14	57.13578	40.9996	70.324
15	57.13604	40.99987	70.32437
16	56.9944	41.0592	70.244
17	57.12868	40.99036	70.31284
18	57.13553	41.00004	70.32405
19	57.13591	41.00003	70.32435
20	56.918	40.9101	70.0949
21	57.12868	40.99036	70.31284
22	57.13477	40.99855	70.32256
23	57.13583	40.99988	70.3242
24	56.9944	41.0592	70.244
25	57.12868	40.99036	70.31284
26	57.13553	41.00004	70.32405
27	57.13591	41.00003	70.32435
28	57.2865	40.9088	70.3205
29	57.15477	40.98986	70.31284
30	57.13578	40.9996	70.32482
31	57.13604	40.99987	70.32443

■

Графики

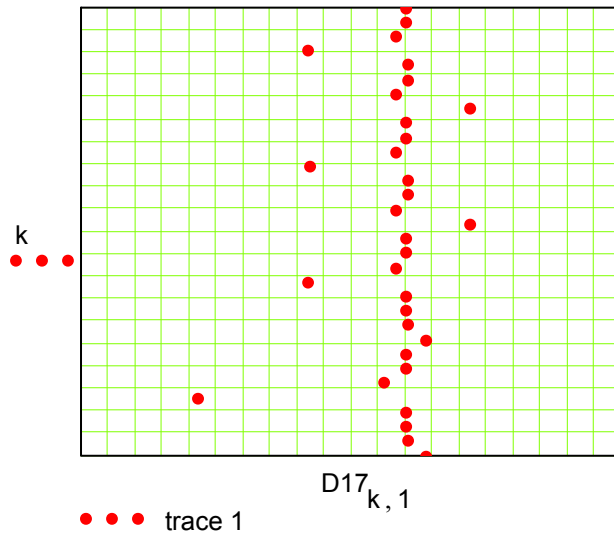
K

$k := 0.. \text{rows}(D17) - 1$



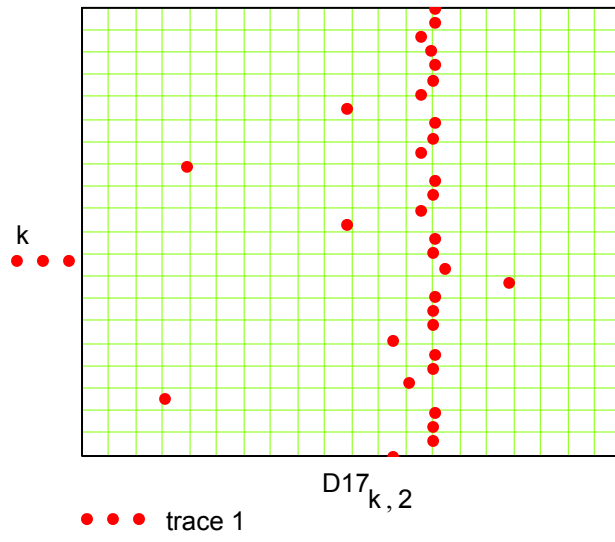
X

K



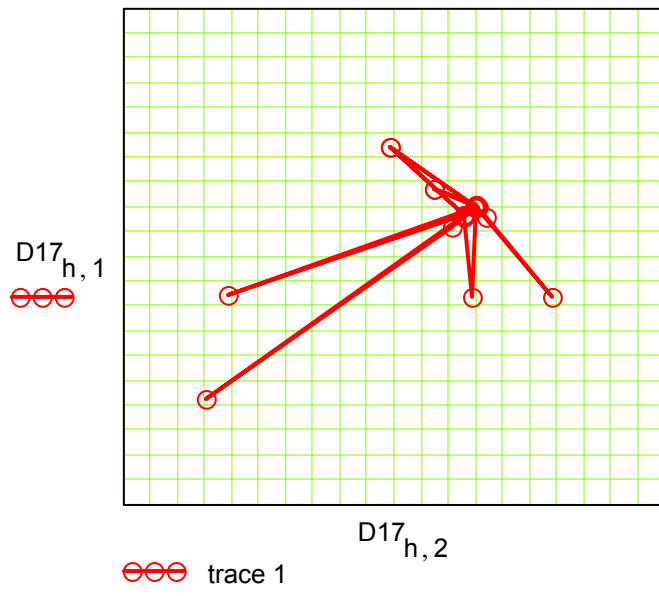
Y

K

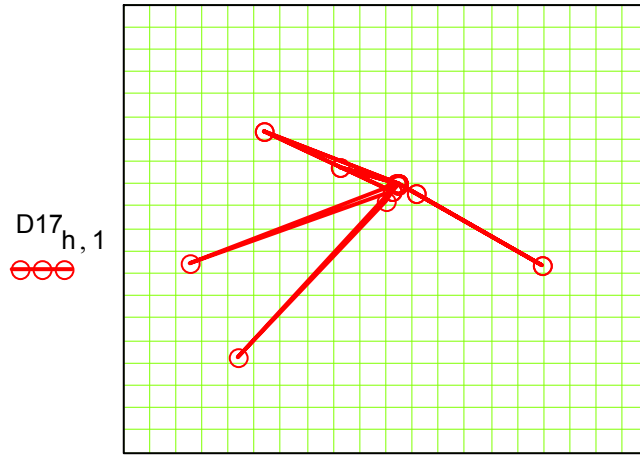


Z

Y



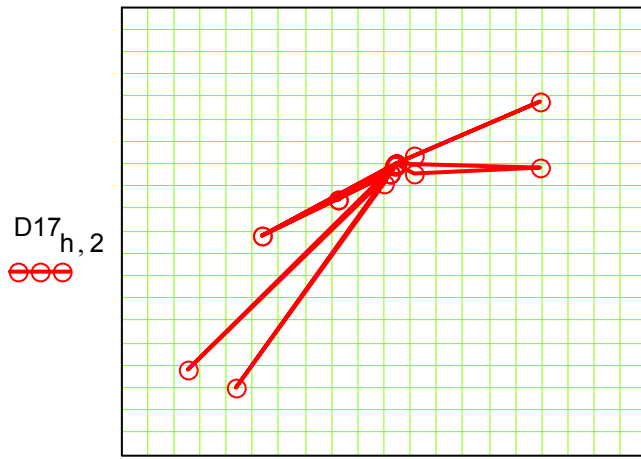
Y



○○○ trace 1

X

Z



○○○ trace 1

X

Расчет закончен

3.4 Катаболизм и анаболизм точек функции

Постановка задачи

"Задана функция $y=f(x)$, необходимо с помощью однообразных операций (итераций) произвести сброс ряда точек исходной функции на оси X и Y с сохранением параметров исходной функциональной зависимости."

ВНИМАНИЕ ! В данном разделе имеют место повторы некоторых положений системы mn параметров, что сделано с целью сокращения обращений читателя к материалам предыдущих разделов.

3.1 Прямоугольная система координат и пифагоровы треугольники.

Пифагорову треугольнику $ПТ(x,y,z) \in PP$ поставим в соответствие точку плоскости с абсциссой x и ординатой y . Подобным $ПТ$ соответствуют точки лежащие на прямой, проходящей через начало координат и через точку $M(x,y)$, являющейся вершиной одного из $ПТ(x,y,z) \in PP$. На рисунке12 представлен луч, задаваемый $ПТ(4,3,5)$. Ясно, что луч, проведенный через начало координат под углом $\alpha=45^\circ$, делит первую четверть координатной системы на две области:

$$0 < \alpha_1 < 45^\circ \text{ и } 45^\circ < \alpha_2 < 90^\circ$$

В первой области $x > y$, во второй $y > x$. Для $ПТ(x,y,z)$ если $x > y$, то луч этого $ПТ$ находится в области $0 < \alpha_1 < 45^\circ$, а если $y < x$, то соответственно в области $45^\circ < \alpha_2 < 90^\circ$. Поэтому в дальнейшем будем считать $x > y$ и тогда достаточно ограничиться рассмотрением точек в области $0 < \alpha_1 < 45^\circ$. На Рис.12 на луче $ПТ(4, 3, 5)$ цифрами 1-3 обозначены значения коэффициента k для координат точки, лежащей на этом луче. Так, например, если $k=2$, то на луче $ПТ(4,3,5)$ эта точка с координатами

$$x=kx_0=2 \cdot 4=8 \quad y=ky_0=2 \cdot 3=6$$

Гипотенуза $z=kz_0=2 \cdot 5=10$ т.е. имеем $ПТ(8,6,10)$. Очевидно, например, что между $k=1$ и $k=2$ можно указать бесконечное множество значений $1 < k < 2$, а следовательно и бесконечное множество координатных треугольников типа $ПТ(kx,ky,kz)$ и все они будут являться пифагоровыми треугольниками. Таким образом если, точка $M(x_i,y_i)$ лежит на луче, задаваемым гипотенузой основного $ПТ(x_0,y_0,z_0)$, то координаты этой точки будут иметь рациональные значения. Если взять координаты такой точки в качестве начальных значений для формул спуска, то после конечного числа итераций можно выйти на $ПТ(k,0,k)$.

Так, если точка $M(x_i,y_i)$ лежит на луче $ПТ(4,3,5)$, то после первой итерации будем иметь $ПТ(k,0,k)$, а если на лучах $ПТ(21,20,29)$, $ПТ(15,8,17)$ или $ПТ(12,5,13)$, то после второй итерации получим $ПТ(k,0,k)$. Для верхней ветви дерева $ПТ$ всегда $x_0=y_0+1$, а для нижней ветви $x_0=z_0-1$. Поэтому с увеличением значения x_0 при движении по верхней ветви вправо мы будем приближаться к лучу $\alpha=45^\circ$, а при

движении по нижней ветви - соответственно к оси X. Так, например, после девятой итерации при движении вверх по дереву будем иметь:

- на верхней ветви дерева ПТ(4684660, 4684659, 6625109);
- на нижней ветви дерева ПТ(180,19,181).

Когда известен основной ПТ, задающий луч, то несложно определить коэффициент K любой точки, находящейся на этом луче. Так, например, известно, что точка M(11,2;8,4) лежит на луче, задаваемым ПТ(4,3,5), тогда коэффициент K будет равен

$$k = \frac{x_m}{4} = \frac{y_n}{3} \rightarrow k = \frac{11.2}{4} = \frac{8.4}{3} = 2.8$$

Сложнее определить K для случая, когда известно, что точка с координатами находится на луче, задаваемым ПТ, но неизвестно на каком именно. Ранее было показано, что эту задачу можно решить с помощью формул спуска. Более того, с помощью этих формул путем конечного числа итераций можно дать ответ на более сложный вопрос: "Находиться точка M(x_i,y_i) на каком-либо луче задаваемым основным ПТ, или нет?".

1

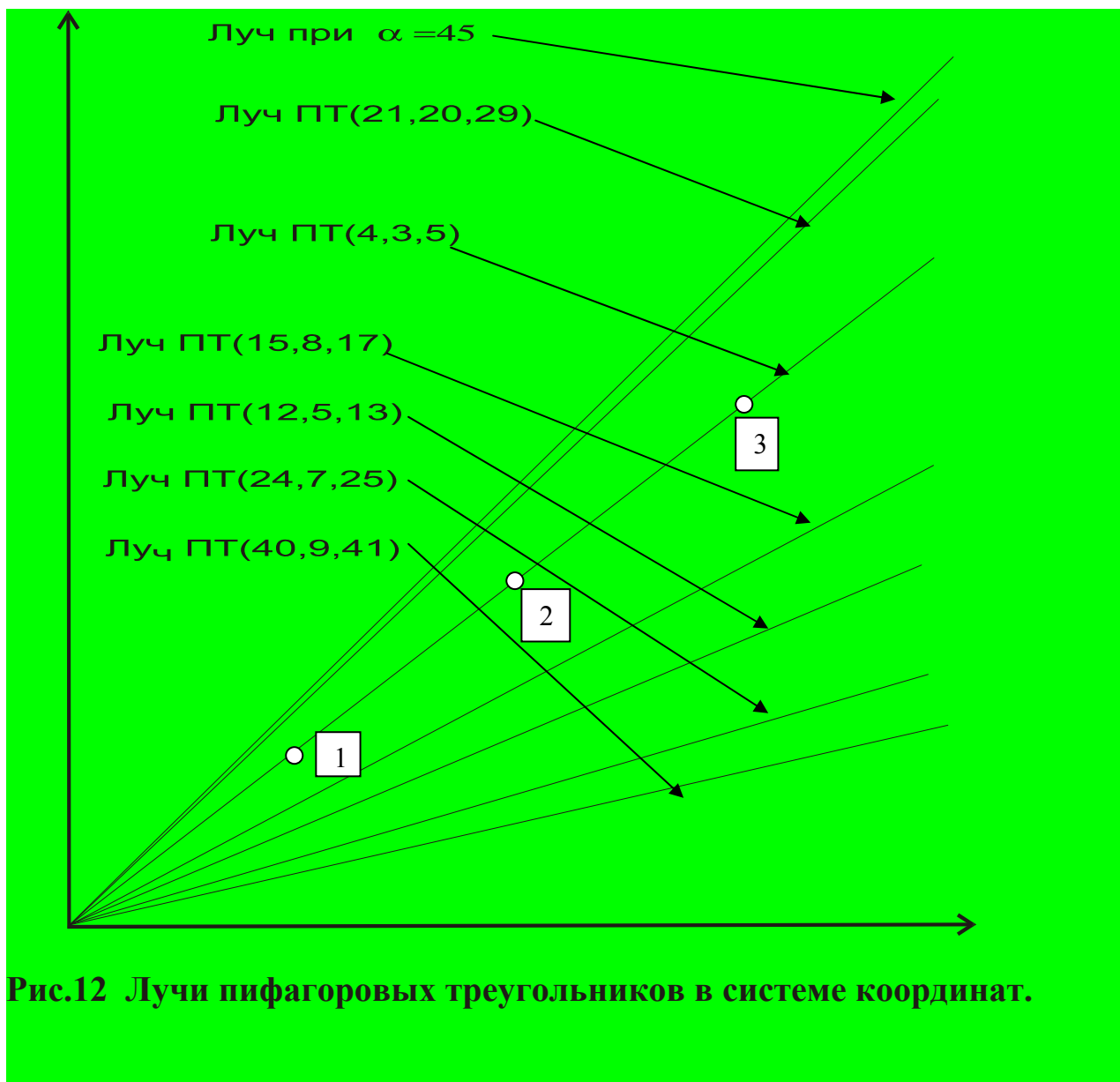


Рис.12 Лучи пифагоровых треугольников в системе координат.

Формулы подъема

$$\begin{aligned}x_1 &= 2z_0 + x_0 + 2y_0 \\ y_1 &= 2z_0 + 2x_0 + y_0 \\ z_1 &= 3z_0 + 2x_0 + 2y_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= 2z_0 + x_0 - 2y_0 \\ y_2 &= 2z_0 + 2x_0 - y_0 \\ z_2 &= 3z_0 + 2x_0 - 2y_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_3 &= 2z_0 - x_0 + 2y_0 \\ y_3 &= 2z_0 - 2x_0 + y_0 \\ z_3 &= 3z_0 - 2x_0 + 2y_0\end{aligned}$$

Формулы спуска

$$\begin{aligned}x_1 &= |2z_0 - x_0 - 2y_0| \\ y_1 &= |2z_0 - 2x_0 - y_0| \\ z_1 &= 3z_0 - 2x_0 - 2y_0\end{aligned}$$

Пример.3.1 Пусть имеем в качестве исходных данных три ПТ:
ПТ(72,65,97), ПТ(56,33,65), ПТ(35,12,37).

Для организации катаболизма необходимо к значениям элементов ПТ применить формулы спуска. При этом за X надо принять большее значение, а за Y – меньшее, что необходимо для нахождения в исходном секторе значений.

1. ПТ₁(72,65,97)

→

$$\begin{aligned}x_{11} &= |2 \cdot 97 - 2 \cdot 72 - 65| = |-15| = 15 \\ y_{11} &= |2 \cdot 97 - 72 - 2 \cdot 65| = |-8| = 8 \\ z_{11} &= 3 \cdot 97 - 2 \cdot 72 - 2 \cdot 65 = 17\end{aligned}$$

2. ПТ₂(56,33,65)

→

$$\begin{aligned}x_{21} &= |2 \cdot 65 - 2 \cdot 56 - 33| = |-15| = 15 \\ y_{21} &= |2 \cdot 65 - 56 - 2 \cdot 33| = |-8| = 8 \\ z_{21} &= 3 \cdot 65 - 2 \cdot 56 - 2 \cdot 33 = 17\end{aligned}$$

3. ПТ₃(35,12,37)

→

$$\begin{aligned}x_{31} &= |2 \cdot 37 - 35 - 2 \cdot 12| = 15 \\ y_{31} &= |2 \cdot 37 - 2 \cdot 35 - 12| = |-8| = 8 \\ z_{31} &= 3 \cdot 37 - 2 \cdot 35 - 2 \cdot 12 = 17\end{aligned}$$

Т.о. в результате одной итерации спуска, мы вышли на один ПТ, для каждого из трёх исходных ПТ. Операция катаболизма заключается в слиянии триады (трех точек) в одну точку.

Пример3.2 Пусть имеем в качестве исходных данных три ПТ:

ПТ₁(7.755, 6.768, 10.293), ПТ₂(141.30, 87.92, 166.42), ПТ₃(65.04, 18.97, 67.75).

Необходимо реализовать спуск этих ПТ на нулевой уровень.

1. В результате первой итерации спуска получим для ПТ₁:

$$x_{11} = |2 \cdot 10.923 - 2 \cdot 7.755 - 6.768| = |-1.692| = 1.692$$

$$y_{11} = |2 \cdot 10.293 - 7.755 - 2 \cdot 6.768| = |-0.705| = 0.705$$

$$z_{11} = 3 \cdot 10.293 - 2 \cdot 7.755 - 2 \cdot 6.768 = 1.833$$

$$\rightarrow \text{ПТ}_{11}(1.692, 0.705, 1.833)$$

2..Теперь примем ПТ₁₁ в качестве исходного и снова применим формулы спуска. Тогда в результате второй итерации

$$x_{12} = |2 \cdot 1.833 - 1.692 - 2 \cdot 0.705| = 0.564$$

$$y_{12} = |2 \cdot 1.833 - 2 \cdot 1.692 - 0.705| = 0.423$$

$$z_{12} = 3 \cdot 1.833 - 2 \cdot 1.692 - 2 \cdot 0.705 = 0.705$$

$$\rightarrow \text{ПТ}_{12}(0.564, 0.423, 0.705).$$

3. Третья итерация.

$$x_{13} = |2 \cdot 0.705 - 0.423 - 2 \cdot 0.564| = |-0.141| = 0.141$$

$$y_{13} = |2 \cdot 0.705 - 2 \cdot 0.423 - 0.564| = 0$$

$$z_{13} = 3 \cdot 0.705 - 2 \cdot 0.423 - 2 \cdot 0.564 = 0.141$$

Т.к. один из элементов равен нулю, то это означает, что после третьей итерации спуск завершился выходом на нулевой уровень. При этом получили $k=0.141$. Для определения основного ПТ, для которого исходный не основной ПТ является подобным, необходимо значение каждого элемента исходного ПТ разделить на значение k . Тогда

$$X = \frac{7.755}{0.141} = 55, Y = \frac{6.768}{0.141} = 48, Z = \frac{10.293}{0.141} = 73$$

4. Результаты подобных расчетов для ПТ₂ и ПТ₃ представлены в таблице 3.1.

Таблица.1

№ ПТ		№ итерации спуска				Основной ПТ
		0	1	2	3	
1	X	7.755	1.692	0.564	0.141	55
	Y	6.768	0.705	0.423	0	48
	Z	10.293	1.833	0.705	0.141	73
2	X	143.30	37.68	12.56	3.14	45
	Y	87.92	15.70	9.42	0	28
	Z	166.42	40.82	15.70	3.14	53
3	X	65.04	32.52	10.84	2.71	24
	Y	18.97	13.55	8.13	0	7
	Z	67.75	35.23	13.55	2.71	25

Следует обратить внимание на то, что после первой итерации получен выход на один и тот же основной ПТ.

Так, например

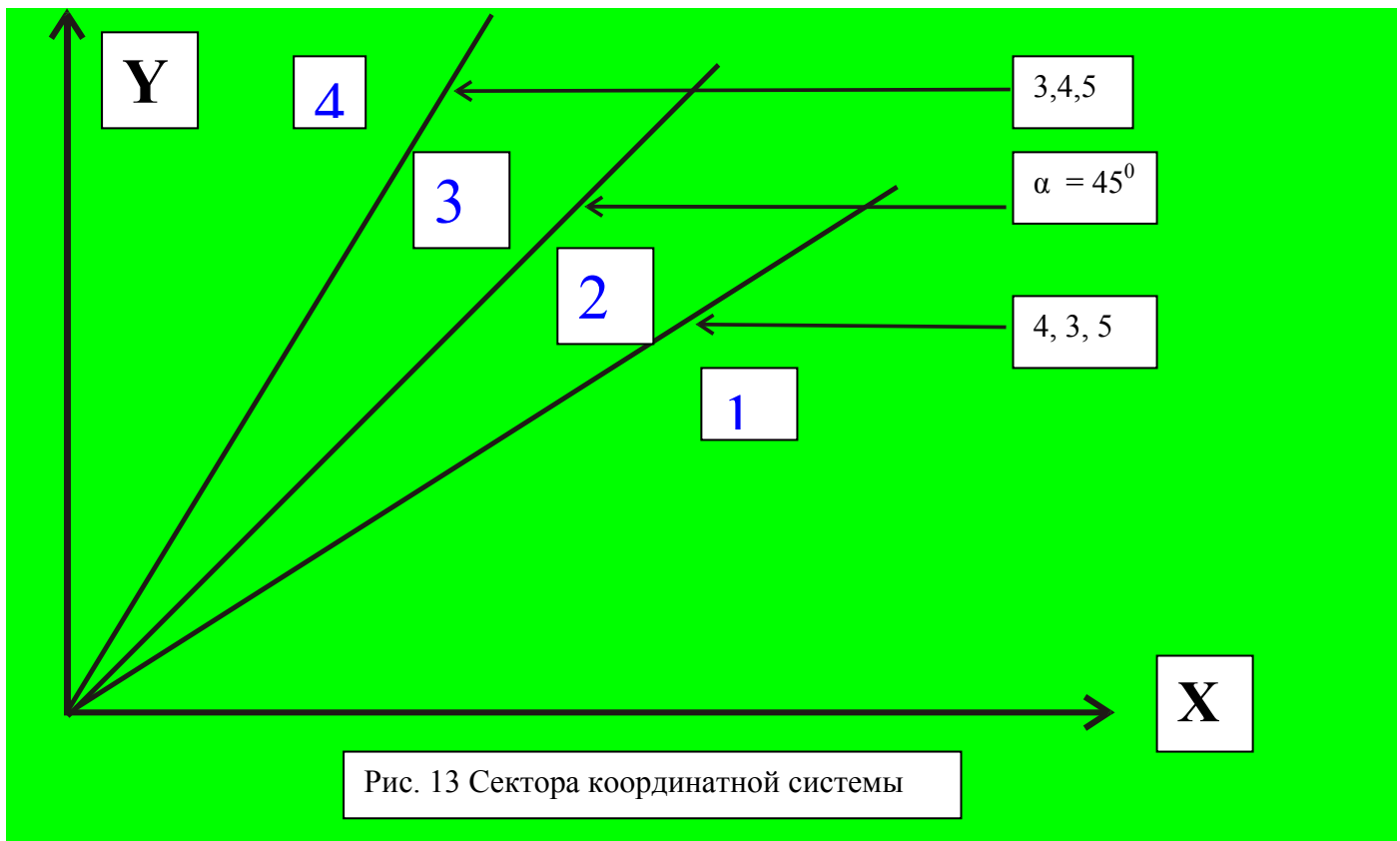
$$X = \frac{x_{11}}{0.141} = \frac{x_{21}}{3.14} = \frac{x_{31}}{2.71} = 12$$

$$Y = \frac{y_{11}}{0.141} = \frac{y_{21}}{3.14} = \frac{y_{31}}{2.71} = 5$$

$$Z = \frac{z_{11}}{0.141} = \frac{z_{21}}{3.14} = \frac{z_{31}}{2.71} = 13$$

Т.е. для каждого из исходных ПТ имеет место свой множитель K , который определяется при выходе на нулевой уровень. В заключении можно сделать следующие основные выводы:

1. Движение вверх по дереву ПТ реализуется с помощью формул подъема (анаболизма)
2. Движение вниз по дереву ПТ реализуется с помощью формул спуска (катаболизма). При этом если для исходного ПТ $X > Y$, то для соблюдения этого условия за X надо принять большее значение из вычисленных по формулам (3.2) и (3.3) катетов.
3. При подъёме по дереву ПТ имеет место тройное ветвление от исходного ПТ. При спуске три ПТ, находящиеся на одном уровне дерева дают по формуле E_4 один ПТ т.е. происходит процесс слияния (см. пример).
4. Треугольники вида $(1,0,1)$ и $(0,1,1)$ будем считать основными пифагоровыми треугольниками нулевого уровня.
5. Для выхода на нулевой уровень при спуске необходимое число итераций равно номеру уровня исходного ПТ.
6. При спуске общий множитель K , имеющий определенное значение для элементов исходного ПТ, сохраняет это значение и на нулевом уровне.
7. При спуске всех ПТ, находящихся на одном уровне, на нулевом уровне получим число значений k_i равное $\sum k_i = 3^N$ где N -номер уровня исходного ПТ.
8. Первая четверть системы координат содержит сектора представленные на Рис.13



3.2 Рациональность точек в системе координат.

Известно, что множество рациональных чисел недостаточна для математического анализа. Поэтому в теории чисел вводится понятие иррациональных чисел. Каждое иррациональное число может быть выражено непериодической бесконечной десятичной дробью. Известна теорема " Если N и k - натуральные числа, причем N не является k -ой степенью целого числа, то $\sqrt[k]{N}$ - число иррациональное ". Из этой теоремы следует, что если для координат точки $M(x_i, y_i)$ обозначить $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и Z не является квадратом целого числа, то число Z - иррациональное. И, наоборот, если Z является квадратом целого числа, при условии, что и x_i, y_i целые, то точка $M(x_i, y_i)$ лежит на луче, задаваемым основным ПТ. Известно соответствие между основным ПТ (x_0, y_0, z_0) и точкой плоскости. Так, если принять за абсциссу и ординату $\eta = \frac{x_0}{z_0}$, $h = \frac{y_0}{z_0}$, то из уравнения $x_0^2 + y_0^2 = z_0^2$ будем иметь $\eta^2 + h^2 = 1$. Точки с координатами (η, h) лежат на окружности единичного радиуса. Поэтому, каждому основному ПТ соответствует точка окружности $\eta^2 + h^2 = 1$ с рациональными положительными координатами, или так называемая рациональная точка этой окружности. Поэтому будем называть рациональными точками по Серпинскому все точки лежащие на лучах, задаваемыми основными ПТ и имеющими в значениях координат общий множитель k равный любому, действительному числу. Коэффициент k при этом может иметь и иррациональное значение. Поэтому все точки, находящиеся в плоскости координат можно разделить на два множества, а именно на множество рациональных точек по Серпинскому и множество нерациональных точек. Введем обозначения N_r - множество рациональных точек, N_n - множество нерациональных чисел. В современной математике, приняты следующие определения: числа натуральные, целые (положительные и отрицательные), рациональные и иррациональные - составляют множество действительных чисел. Принято обозначать

R - множество действительных чисел,

N - множество натуральных чисел,

P - множество рациональных чисел,

Z - множество целых чисел.

Множество P и R/P всегда плотны в R , т.е. в каждом интервале $(x: a < x < b)$ существуют как рациональные, так и иррациональные числа. Геометрическое изображение действительных чисел заключается в том, что если на прямой q , заданием точки O и единичного вектора введена система координат, то каждая точка M прямой q определяется своей координатой X . Таким образом, каждой точке M прямой q соответствует одно действительное число X и каждому действительному числу X соответствует одна точка M прямой q . Прямую q принято называется числовой прямой. Каждый луч задаваемый ПТ (x_0, y_0, z_0) может рассматриваться как числовая прямая, поэтому на этом луче находятся как рациональные, так и иррациональные точки. При этом для иррациональных точек, лежащих на луче, задаваемым основным ПТ (x_0, y_0, z_0) коэффициент k будет иметь иррациональное значение. На основании линейности уравнений $E_1 \div E_4$ можно утверждать, что всё множество точек, находящихся на плоскости координат разделяется на два множества, а именно N_r , N_n . Поэтому для любой точки $M(x_i, y_i)$ применение формул спуска E_4 через конечное число итераций позволит определить к какому из этих множеств относиться рассматриваемая точка. Представляют интерес ответы на следующие вопросы:

1. Как близко к лучу с $\alpha=45^\circ$ находится луч, задаваемый основным ПТ вида ПТ(x_0+1, x_0, z_0)? Существует ли предел приближения такого луча к лучу $\alpha=45^\circ$?

2. Как близко к оси X находится луч, задаваемый основным ПТ вида ПТ(x_0, y_0, x_0+1)

3. Существует ли зазор между двумя лучами предельно близкими друг к другу и задаваемыми основными ПТ?

Все эти вопросы можно объединить в один ГЛАВНЫЙ ВОПРОС: "Содержит ли плоскость координат сектора в которые невозможно попасть, используя в качестве координат пару (X, Y) из множества действительных чисел?" Такой же вопрос можно поставить и относительно числового отрезка: "Числовой отрезок содержит точки местоположение которых невозможно указать используя в качестве координаты число из множества действительных чисел?"

Не претендуя ответить на поставленные вопросы рассмотрим лишь некоторые возможные подходы к получению этих ответов.

3. Катаболизм точек исходной функции.

С помощью предложенной автором методики реализуется возможность в системе координат перехода от нерациональной к рациональной точке. Поэтому любую точку $M_i(x_i, y_i)$ принадлежащую функции $y=f(x)$ можно перевести в $M_j(x_j, y_j)$, находящуюся сколь угодно близко к точке $M_i(x_i, y_i)$, но являющейся рациональной. Следует указать, что использование компьютера с любыми высокими значениями таких параметров как разрядность и объем оперативной памяти не обеспечивает отражение иррациональных чисел.

Точка M_j будет являться точкой пересечения функции $y=f(x)$ с лучом, задаваемым определенным основным пифагоровым треугольником и при этом элементы x_j, y_j, z_j будут иметь вид $x_j=k_j \cdot X_j, y_j=k_j Y_j, z_j=k_j Z_j$, где X_j, Y_j, Z_j элементы ПТ задающего луча. В соответствии с п.8 «основных свойств дерева упорядоченного множества», если исходные значения $x_0=X_j, y_0=Y_j, z_0=Z_j$, являются элементами ПТ, то после ряда итераций по формулам E_4 будет реализован выход на «нулевой» уровень дерева, т.е. на ПТ₁($k_j, 0, k_j$) или на ПТ₂($0, k_j, k_j$) - «сбрасывание вниз» (катаболизм) исходной точки.

Катаболизм отдельной точки с кривой $y=f(x)$ на одну из осей координат с сохранением значения k_j показывает возможность реализации методики перевода и множества точек M_j , относящихся к исходной функции $y=f(x)$. При этом точки M_j находящиеся в секторе $0 < \alpha < 45^\circ$ будут перемещены на ось X, а из сектора $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ соответственно на ось Y. Таким образом исходная функция $y=f(x)$ может быть преобразована в два подмножества значений k_{jx}, k_{jy} расположенных на осях x, y и СОХРАНЯЮЩИХ в себе аналитическую закономерность исходной функции. Эта методика разработана автором.

Точки функции лежащие на лучах, задаваемые основными ПТ, имеют рациональные значения координат при условии, что общий множитель K имеет рациональное значение. В общем случае для любой точки функции $y=f(k)$, лежащей на луче ПТ (далее так будем называть луч, задаваемый основным ПТ) её координаты имеют значение

$$x=kx_{\text{ПТ}}, \quad y=ky_{\text{ПТ}}, \quad z=kz_{\text{ПТ}}$$

Для перевода функции $y=f(x)$ в дискретный вид необходимо записать эту функцию как $ky_{ПТ}=f(kx_{ПТ})$, где $y_{ПТ}$, $x_{ПТ}$ - элементы основного ПТ на луче которого находится данная точка; k – общий множитель определяющий нахождение данной точки на кривой $y=f(x)$.

Для наглядности результатов преобразований рассмотрим, в качестве исходной функции, уравнение прямой.

Пусть имеем исходную функцию $y=ax+b$.

На основании формул системы m параметров можно записать

$$ky_{ПТ} = a \cdot kx_{ПТ} + b \rightarrow k = \frac{b}{y_{ПТ} - ax_{ПТ}}$$

В секторе 1 (см. Рис.13) для ПТ нулевого уровня $x_{ПТ} = 1$, $y_{ПТ}=0$, $k_{01} = -\frac{b}{a}$, т.е. получили координату пересечения исходной прямой с осью x . В секторе 4 для ПТ нулевого уровня $x_{ПТ}=0$, $y_{ПТ}=1 \rightarrow k_{02}=b$, т.е получили координату пересечения исходной прямой с осью y .

На первом уровне дерева имеем два основных ПТ, т.е. – ПТ(4,3,5) – граница секторов 1 и 2; - ПТ(3,4,5) – граница секторов 3 и 4 $\rightarrow k_{11} = \frac{b}{3-4a}$, $k_{12} = \frac{b}{3-4a}$.

Аналогично можно получить формулы для значения k_{i1} и k_{i2} любого уровня основных ПТ.

Пример 2. Пусть имеем в качестве исходной функции уравнение прямой

$$y = -\frac{3}{4}x + 3$$

Необходимо реализовать спуск ряда точек исходной прямой на нулевой уровень. Значение коэффициента k , вычисленные для лучей ПТ трех уровней представлены в таблице 1. Вычисления производились по формулам $E_1 \div E_3$.

Таблица 2

$y = -\frac{3}{4}x + 3; \quad a = -\frac{3}{4}; \quad b = 3; \quad k = \frac{b}{y_{ПТ} - ax_{ПТ}}$									
Уровень	$x_{ПТ}$	$y_{ПТ}$	k	$x_{ПТ}$	$y_{ПТ}$	k	$x_{ПТ}$	$y_{ПТ}$	k
0	1	0	4						
	0	1	3						
1	4	3	0.5						
	3	4	0.48						
2	21	20	0.083	15	8	0.156	12	5	0.214
	20	21	0.0833	8	15	0.143	5	12	0.190
3	120	119	0.0144	77	36	0.032	80	39	0.030
	119	120	0.0143	36	77	0.029	39	80	0.027
	72	65	0.0252	56	33	0.04	35	12	0.078
	65	72	0.0248	33	56	0.037	12	35	0.068
	55	48	0.0336	45	28	0.0486	24	7	0.12
	48	55	0.0329	28	45	0.0454	7	24	0.1026

!!!

Таблица 3

Уровень	0		1		2					
Луч ПТ		1,0,1	0,1,1	4,3,5	3,4,5	21,20,29	20,21,29	15,8,17	8,15,17	12,5,13
Точка пересечения	X	4	0	2	1.44	1.762	1.667	2.340	1.144	2.568
	Y	0	3	1.5	1.92	1.678	1.749	1.248	2.145	1.070
	Z	4	3	2.5	2.40	2.433	2.416	2.652	2.431	2.782
Уровень	2		3		3					
Луч ПТ		5,12,13	120,119,169	119,120,169	77,36,85	36,77,85	80,39,89	39,80,89	72,65,97	65,72,97
Точка пересечения	X	0.95	1.728	1.702	2.464	1.044	2.40	1.053	1.814	1.612
	Y	2,28	1,714	1,716	1,152	2,233	1,17	2,160	1,638	1,786
	Z	2.47	2.434	2.417	2.720	2.465	2.67	2.403	2.444	2.406
Уровень	3		3		3					
Луч ПТ		56,33,65	33,56,65	35,12,37	12,35,37	55,48,73	48,55,73	45,28,53	28,45,53	
Точка пересечения	X	2.24	1.221	2.730	0.816	1.848	1.579	2.187	1.271	
	Y	1.32	2.072	0.936	2.380	1.613	1.809	1.361	2.043	
	Z	2.6	2.405	2.886	2.516	2.453	2.402	2.576	2.406	
Уровень	3		3		3					
Луч ПТ		24,7,25	7,24,25							
Точка пересечения	X	2.88	0.718							
	Y	0.84	2.462							
	Z	3	2..565							

Для определения координат точек пересечения заданной прямой с лучами ПТ необходимо умножить значения $X_{пт}$ и $Y_{пт}$ на соответствующее значение множителя k (см.табл.3.1). Так, например, для лучей ПТ₁(4,3,5) и ПТ₂(3,4,5) будем иметь

$$X_1 = kX_{пт} = 0.5 \cdot 4 = 2, \quad Y_1 = kY_{пт} = 0.5 \cdot 3 = 1.5, \quad Z_1 = kZ_{пт} = 0.5 \cdot 5 = 2.5$$

5=2.5

$$X_2 = 0.48 \cdot 3 = 1.44, \quad Y_2 = 0.48 \cdot 4 = 1.92, \quad Z_2 = 0.48 \cdot 5 = 2.4$$

5=2.4

Координаты всех точек пресечения заданной прямой с лучами ПТ от первого до третьего уровня включительно представлены в таблице 3. 2. Ясно, что все точки пересечения (табл.3.2) лежат на исходной прямой и на лучах ПТ от уровня 0 до уровня 3. Общее число этих точек равно 28. При этом 14 точек находятся в секторах 1 и 2 и 14 точек - в секторах 3 и 4 (Рис3.2).

Первая итерация. Каждая итерация реализуется с помощью формул (3.4), при этом исходная точка переместится на один уровень ниже по дереву ПТ. Так, например, возьмём в качестве исходной точку с координатами $x_0=2.24$, $y_0=1.32$, $z_0=2.6$ (см.табл.3.2). Это координаты точки пересечения луча ПТ(56,33,65) с исходной прямой. При этом коэффициент $k=0.04$ (см.табл.3.1). Произведём итерацию, применив к этим значениям координат, формулы (3.4). Тогда получим

$$x_1 = |2z_0 - 2x_0 - y_0| = |2 \cdot 2.6 - 2 \cdot 2.24 - 1.32| = |-0.6| = 0.6$$

$$y_1 = |2z_0 - x_0 - 2y_0| = |2 \cdot 2.6 - 2.24 - 2 \cdot 1.32| = |0.32| = 0.32$$

$$z_1 = 3z_0 - 2x_0 - 2y_0 = 3 \cdot 2.6 - 2 \cdot 2.24 - 2 \cdot 1.32 = 0.68$$

Т.к. при спуске общий множитель k сохраняет своё значение, то для определения ПТ на луч которого переместилась рассматриваемая точка, необходимо разделить полученные значения X_1 , Y_1 , Z_1 на $k=0.04$. Тогда

$$x_{пт_1} = \frac{0.6}{0.04} = 15, \quad y_{пт_1} = \frac{0.32}{0.04} = 8, \quad z_{пт_1} = \frac{0.68}{0.04} = 17$$

т.о. в результате первой итерации исходная точка с координатами $x_0=2.24$, $y_0=1.32$, $z_0=2.6$

переместилась в точку с координатами $x_1=0.6$, $y_1=0.32$, $z_1=0.68$ (см. Рис3.1), находящейся на луче ПТ(15,8,17). Из рассмотрения Рис.3.1 следует, что после первой итерации точки, лежащие на: лучах трех ПТ: ПТ(120,119,169), ПТ(77,36,85), ПТ(80,39,89) переместятся на на луч ПТ(21,20,29) с сохранением своих значений K ;

- лучах ПТ(72,65,97), ПТ(56,33,65), ПТ(35,12,37) переместятся на луч ПТ(15,18,17) с сохранением своих значений K ;
- лучах ПТ(55,48,73), ПТ(45,28,53), ПТ(21,7,25) переместятся на луч ПТ(12,5,13) с сохранением своих значений K ;
- лучах ПТ(21,20,29), ПТ(15,8,17), ПТ(12,5,13) переместятся на луч ПТ(4,3,5) с сохранением своих значений K ; и т.д. для точек, лежащих в секторах 3 и 4.

Результаты этих расчетов представлены в табл.3.3 и табл.3. 4. В табл. 3.3 представлены результаты для точек, лежащих в секторах 1 и 2. В табл3..4 – соответственно для точек лежащих в секторах 3 и 4.

Таблица 3.3

Луч исходного ПТ	ПТ(120,119,169)			ПТ(77,36,85)			ПТ(80,39,89)		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Координаты исх. точек	1.728	1.714	2.434	2.464	1.152	2.720	2.400	1.170	2.670
Координаты после итер.	0.302	0.288	0.418	0.672	0.640	0.928	0.630	0.600	0.870
Множитель K	0.0144			0.0320			0.0300		
Луч ПТ после итерации	ПТ(21,20,29)								

Луч исходного ПТ	ПТ(72,65,97)			ПТ(56,33,65)			ПТ(35,12,37)		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Координаты исх. точек	1.814	1.638	2.444	2.24	1.32	2.60	2.730	0.936	2.886
Координаты после итер.	0.378	0.200	0.428	0.600	0.320	0.680	1.170	0.624	1.326
Множитель K	0.0252			0.0400			0.0780		
Луч ПТ после итерации	ПТ(15,8,17)								

Луч исходного ПТ	ПТ(55,48,73)			ПТ(45,28,53)			ПТ(24,7,25)		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Координаты исх. точек	1.848	1.613	2.453	2.187	1.361	2.576	2.880	0.840	3.000
Координаты после итер.	0.403	0.168	0.437	0.583	0.243	0.632	1.440	0.600	1.560
Множитель K	0.0336			0.0486			0.1200		
Луч ПТ после итерации	ПТ(12,5,13)								

Луч исходного ПТ	ПТ(121,20,29)			ПТ(15,8,17)			ПТ(12,5,13)		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Координаты исх. точек	1.762	1.678	2.340	2.340	1.248	2.652	2.568	1.070	2.782
Координаты	0.336	0.252	0.624	0.624	0.468	0.780	0.856	0.642	1.070

после итер.									
Множитель K	0.0839			0.1560			0.2140		
Луч ПТ после итерации	ПТ(4,3,5)								

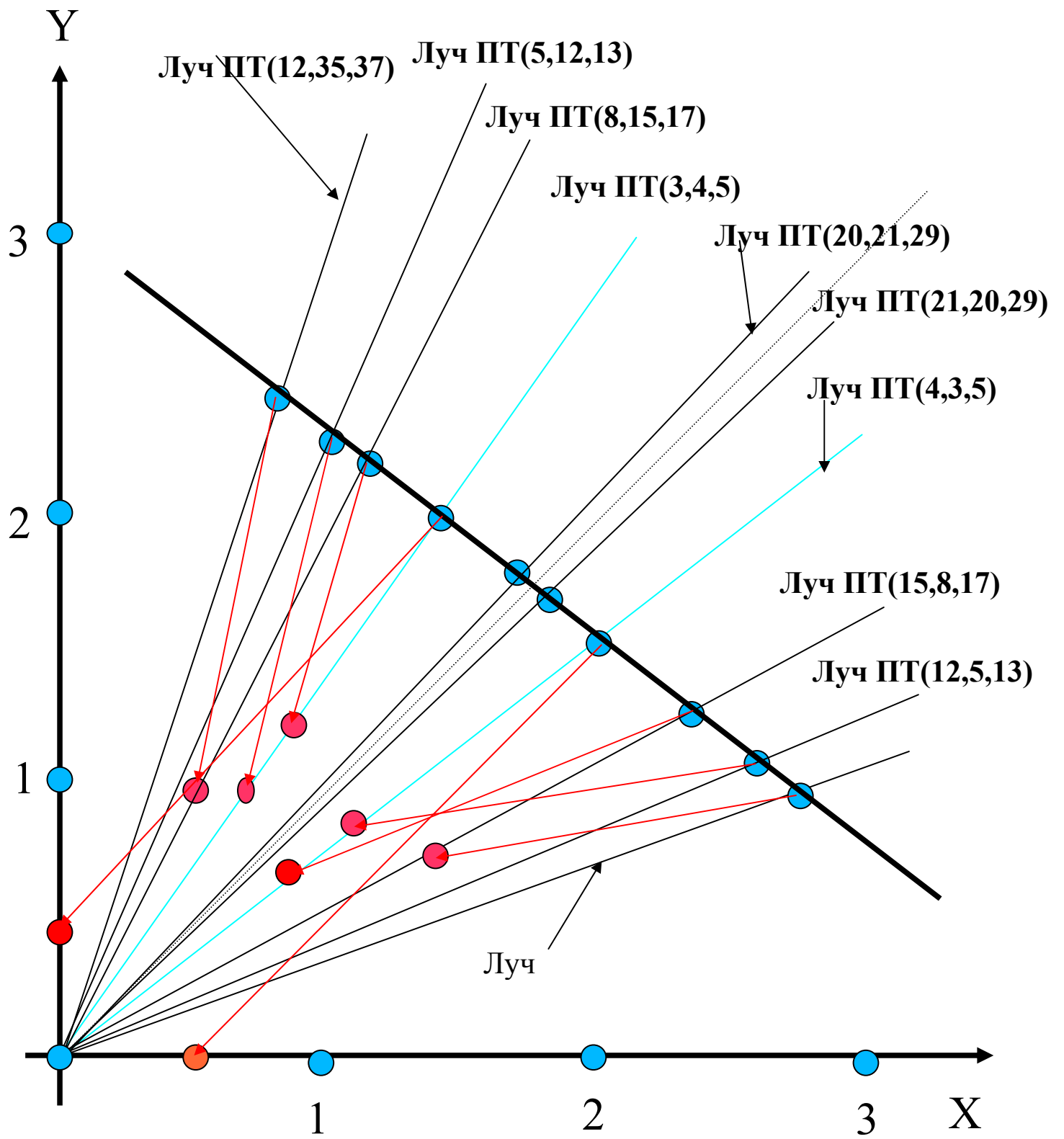


Рис.14 Распад прямой линии после первой итерации

Таблица 3.4

Луч исходного ПТ	ПТ(119,120,169)			ПТ(36,77,85)			ПТ(39,80,89)		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Координаты исх. точек	1.702	1.716	2.417	1.044	2.233	2.465	1.053	2.160	2.403
Координаты после итер.	0.286	0.300	0.415	0.58	0.609	0.841	0.540	0.567	0.783
Множитель <i>K</i>	0.0143			0.0290			0.0270		
Луч ПТ после итерации	ПТ(20,21,29)								

Луч исходного ПТ	ПТ(65,72,97)			ПТ(33,56,65)			ПТ(12,35,37)		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Координаты исх. точек	1.612	1.786	2.406	1.221	2.072	2.405	0.816	2.380	2.516
Координаты после итер.	0.198	0.372	0.422	0.296	0.555	0.629	0.544	1.020	1.156
Множитель <i>K</i>	0.0248			0.0370			0.0680		
Луч ПТ после итерации	ПТ(8,15,17)								

Луч исходного ПТ	ПТ(48,55,73)			ПТ(28,45,53)			ПТ(7,24,25)		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Координаты исх. точек	1.579	1.809	2.402	1.271	2.043	2.406	0.718	2.462	2.565
Координаты после итер.	0.164	0.395	0.428	0.227	0.545	0.590	0.513	1.231	1.334
Множитель <i>K</i>	0.0329			0.0454			0.1026		
Луч ПТ после итерации	ПТ(5,12,13)								

Луч исходного ПТ	ПТ(20,21,29)			ПТ(8,15,17)			ПТ(5,12,13)		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Координаты исх. точек	1.667	1.749	2.416	1.144	2.145	2.431	0.95	2.28	2.47
Координаты после итер.	0.250	0.333	0.416	0.429	0.572	0.715	0.570	0.760	0.950
Множитель <i>K</i>	0.0833			0.1436			0.1900		
Луч ПТ после итерации	ПТ(3,4,5)								

На Рис.3.1 показано как смещаются точки исходной прямой после проведения первой итерации спуска. Для улучшения наглядности часть лучей исходных ПТ на рисунке не показан. Две точки (точки пересечения исходной прямой с осями X и Y) в исходном состоянии находились на нулевом уровне, поэтому первая итерация к ним не применялась. В данном примере в качестве исходных были приняты координаты точек пересечения прямой с лучами ПТ от нулевого до третьего

уровня дерева ПТ, поэтому после третьей итерации все исходные точки будут находиться на осях системы координат (на нулевом уровне дерева ПТ) при этом точки, находящиеся в секторах 1 и 2 окажутся на оси X, а точки секторов 3 и 4 соответственно на оси Y. При этом координаты этих точек на осях будут равны значениям соответствующих множителей K. На основании проведенных расчетов и свойств дерева ПТ можно сделать следующие основные **выводы**:

1. Координаты точки пересечения исходной функции (точка спуска) с лучом ПТ путем конечного числа итераций могут быть приведены на первый или нулевой уровень.
2. Значение общего множителя K имеющее место для координатной точки спуска содержится в качестве координаты на отрезке нулевого уровня.
3. Множество коэффициентов K, образованных в результате спуска множества точек исходной функции может находиться на сколь угодно малом отрезке нулевого уровня, т.е. исходная функция может быть представлена в виде множества значений K на сколь угодно малом отрезке нулевого уровня, что открывает новые возможности как в математическом представлении функции, так и в их исследованиях.

4. Анаболизм точек функции.

Постановка задачи

"На осях X и Y задана группа точек. Известно, что эта группа точек является отражением некой исходной функции и была получена в результате катаболизма. Необходимо с помощью однообразных итераций произвести операцию анаболизма (подъема) заданной группы точек с целью их вывода на график исходной функции"

Представление сложной функции в виде группы точек (K_j) на отрезке конечной длины ставит обратную задачу, т.е. задачу АНАБОЛИЗМА (подъема) этой группы точек до момента их выхода на конечную функцию, фактически «закодированную» в каждом из значений K_j .

Сложность этой задачи заключается в том, что для каждого значения K_j необходимо указать точный путь движения по дереву ПТ до конечной точки пересечения конкретного луча основного ПТ с функцией $y=f(x)$ закодированной в исходной группе точек K_j . Таким образом обязательным условием для решения задачи анаболизма является **НЕОБХОДИМОСТЬ иметь код пути** движения вверх по дереву ПТ для каждого значения K_j с критерием конечного пункта назначения.

Пример 3. Пусть имеем $k_{jx} = 1.44$. Эта точка на оси X может быть записана в виде ПТ(1.44, 0, 1.44). Здесь $x_0 = 1.44$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1.44$.

Первая итерация подъема.

$$x_{11} = 2z_0 + 2x_0 + y_0 \rightarrow x_{11} = 2.88 + 2.88 + 0 = 4 \cdot 1.44 = 5.76$$

$$y_{11} = 2z_0 + x_0 + y_0 \rightarrow y_{11} = 2.88 + 1.44 + 0 = 3 \cdot 1.44 = 4.32$$

$$z_{11} = 3z_0 + 2x_0 + 2y_0 = 5 \cdot 1.44 = 7.20$$

т.е. получили ПТ₁(4 · 1.44, 3 · 1.44, 5 · 1.44) → ПТ₁(4 · k_j, 3 · k_j, 5 · k_j).

Обратимся к рисунку дерева ПТ (см. Рис. 1.4). Следующая итерация подводит к необходимости иметь указатель (критерий) дальнейшего пути, т.к. впереди три следующих ПТ. Такой указатель выбора одного из трех возможных направлений можно выразить в виде двухразрядного двоичного кода, например, направление

[1][0]-первое, формулы (1,2)

[0][1]- второе, формулы (1,3)

[1][1]-третье, формулы (1,4)

[0][0]- конец подъема.

Теперь код точки M_j, находящейся на графике функции $y=f(x)$ в своем отображении на нулевом уровне будет иметь вид

k_j , [1][0], [0][1], [1][1], [0][0] –код останова подъема
направления уровней: 1 2 3

Может возникнуть вопрос: «В чем отличие обычного произвольно выбранного метода, кодирования информации от предлагаемого автором?» Отличие заключается в том, что метод анаболизма точек отражает объективную закономерность процесса движения вверх по дереву ПТ, а не искусственное кодирование, имеющего целью задачу КРИПТОСТОЙКОСТИ.

Пример 4. Дано два значения $k_1 = 0.0329$, $k_2 = 0.12$. Определить уравнение прямой, проходящей через точки с этими множителями.

Решение.

1. Уравнение прямой имеет вид $y = ax + b$

2. Произведем замену y и x на $ky_{пт}$ и $kx_{пт}$

$$\rightarrow ky_{пт} = akx_{пт} + b \rightarrow b = k(y_{пт} - ax_{пт})$$

3. $\rightarrow k_1(y_{1пт} - ax_{1пт}) = k_2(y_{2пт} - ax_{2пт})$

$$\rightarrow a = \frac{k_1 y_{1пт} - k_2 y_{2пт}}{k_1 x_{1пт} - k_2 x_{2пт}} \rightarrow b = k_1 (y_{1пт} - ax_{1пт})$$

4. Для получения численных значений коэффициентов a и b необходимо знать

$X_{1пт}$, $Y_{1пт}$, $X_{2пт}$, $Y_{2пт}$, т.е. лучи ПТ на которых находятся точки пересечения этих

лучей с искомой функцией $y = ax + b$.

Пример 3.5. Известны коды значений

$$k_{1y} = 0,0329 \quad [1][1] \rightarrow [1][0] \rightarrow [0][0]$$

$$k_{2x} = 0,12 \quad [1][1] \rightarrow [1][1] \rightarrow [0][0]$$

1. Определить координаты точек пересечения с функцией $y = ax + b$.

2. Определить значения а и b.

Решение.

1. Индекс «1у» указывает на то, что после любой итерации подъема точки по дереву ПТ всегда $y > x$. Для «1х» $\rightarrow x > y$.
2. Код [0][0]- код прекращения подъема.
3. Для обоих значений k_1 и k_2 необходимо произвести две итерации подъема, т.е. закончить процесс анаболизма на третьем уровне дерева ПТ.
4. На третьем уровне дерева ПТ (см.Рис 1.4), в соответствии с принятым кодированием будем иметь ПТ₁($k_1 \cdot 48, k_1 \cdot 55, k_1 \cdot 73$) и ПТ₂($k_2 \cdot 24, k_2 \cdot 7, k_2 \cdot 25$)
 $\rightarrow X_{1ПТ}=48, Y_{1ПТ}=55, Z_{1ПТ}=73$
 $\rightarrow X_{2ПТ}=24, Y_{2ПТ}=7, Z_{2ПТ}=25$
5. Из формул (3.5) следует,
$$a = \frac{0,0329 \cdot 55 - 0,12 \cdot 7}{0,0329 \cdot 48 - 24 \cdot 0,12} = -0,748 \quad b = 0,0329 (55 - 0,748 \cdot 48) = 2,99$$
6. Координаты точек пересечения с функцией $y=-0,748x+2,99$
 $x_1=k_1 \cdot X_{1ПТ}=0,0329 \cdot 48=1,579, \quad y_1=k_1 \cdot Y_{1ПТ}=0,0329 \cdot 55=1,809$
 $x_2=k_2 \cdot X_{2ПТ}=0,12 \cdot 24=2,88, \quad y_2=k_2 \cdot Y_{2ПТ}=0,12 \cdot 7=0,84$
 $\rightarrow y_1=-0,748 \cdot 1,579 + 2,99=1,8089;$
 $y_2=-0,748 \cdot 2,88 + 2,99=0,83576 \approx 0,84$

Расчет закончен.

ВЫВОДЫ

1. В системе координат функция $y=f(x)$ может иметь точки с рациональными координатами. Точки с рациональными координатами с помощью однообразных преобразований (итераций) по формулам спуска могут быть представлены в виде группы точек расположенных на осях координат с сохранением исходной функциональной зависимости в закодированном виде.

3.4 Обработка данных геодезических измерений

Программа обработки данных геодезических измерений с оценкой точностных характеристик

Для исходных данных (как экспериментальных данных, полученных в результате одиночного эксперимента) на основе системы $m \ n$ параметров определяются точностные характеристики, т.е. вычисляются диапазон допустимых отклонений геодезических измерений для каждой отдельной пары значений α и R . Современные известные методы определения этих характеристик (дисперсии и других статистических характеристик) основаны на обработке массива данных и поэтому не могут быть использованы для одиночной пары координат.

Система $m \ n$ параметров и метод определения массива данных на основе одиночной пары координат разработаны автором. Результаты расчетов по данной программе могут быть использованы

1. Для определения диапазона допустимых предельных ошибок при измерениях координат угловых точек конкретного земельного участка.

2. Выбора геодезических приборов с необходимыми техническими характеристиками для получения высокоточных измерений земельного участка.

Исходные данные

$k := 0..(\text{rows}(R) - 2)$

$i := 0..(\text{rows}(R) - 1)$

$R :=$

	0
0	3.61
1	9.85
2	19.42
3	22.2
4	19.24
5	14.56
6	9.06
7	3.61

$\alpha :=$

	0	1	2
0	33	42	12
1	23	57	45
2	34	30	31
3	54	9	43
4	62	6	10
5	74	3	17
6	83	39	35
7	33	42	12

$$X(i) := \sin \left[\frac{\left(\frac{\alpha_{i,2}}{3600} + \alpha_{i,0} + \frac{\alpha_{i,1}}{60} \right)}{57.2958} \right] \cdot R_i$$

$$Y(i) := \cos \left[\frac{\left(\frac{\alpha_{i,2}}{3600} + \alpha_{i,0} + \frac{\alpha_{i,1}}{60} \right)}{57.2958} \right] \cdot R_i$$

```

X :=
| V ← 0
| h ← 0
| for h ∈ 0..(rows(R) - 1)
|   Vh ← X(h)
| V

```

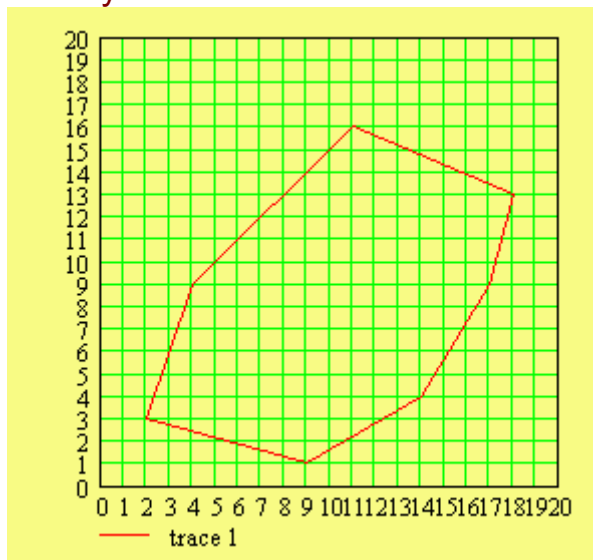
```

Y :=
| V ← 0
| h ← 0
| for h ∈ 0..(rows(R) - 1)
|   Vh ← Y(h)
| V

```

```
i := 0..(rows(R) - 1)
```

План участка



```

X =
(
  2.001
  4
  11.002
  17.997
  17.004
  14
  9.005
  2.003
)
Y =
(
  3
  9.001
  16.003
  12.998
  9.002
  4
  1.001
  3.003
)

```

SL = ■

Выходные данные:

1. Для каждой угловой точки определяются координаты 24 рациональных точек, находящихся в ее ближних окрестностях, т.е. X, Y, Z для каждой из рациональных точек.

2. На основе данных массива (см. п. 1) определяются для каждой угловой точки

2.1. Дисперсия координаты X .

2.2. Дисперсия координаты Y .

2.3. Дисперсия координаты Z .

3. Матрицы значений координат рациональных точек соседних с каждой из угловых точек

3.1. Координаты X (матрица A7)

3.2. Координаты Y (матрица A27)

3.3. Значения Z (матрица Q7)

Индексы при матрицах означают

0-нулевая исходная точка (см. таблицу исходных данных)

1-первая исходная точка

2-вторая исходная точка

...

7-седьмая исходная точка

4. Дисперсии значений координат исходных точек (обусловленные теорией чисел), представленные в виде матриц для значений X, Y, Z.

5. Графики

5.1. $DX=f(i)$, где DX-дисперсия координаты X, i - номер точки.

5.2. $DY=f(i)$

5.3. $DZ=f(i)$

5.4 $DY=f(DX)$

6. Графики возможных отклонений координат угловых точек .

7. Трехмерные графики

7.1. $F(DX, DY, DZ)$ -

7.2. $F(DX, DY, DZ)$ -

7.3. $F(X, Y, Z)$ - для каждой из исходных точек.

```
SL := 
$$\begin{cases} V \leftarrow 0 \\ h \leftarrow 0 \\ \text{for } h \in 0..(\text{rows}(X) - 2) \\ \quad V_h \leftarrow \left| X_{h+1} - X_h \right| \cdot \left| Y_{h+1} - Y_h \right| \cdot \frac{1}{2} \\ V \end{cases}$$

```

```
Z := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh ← √(Xh)2 + (Yh)2
      | V
```

Выходные данные, полученные в виде массивов по предлагаемой программе, могут быть использованы для проведения и других статистических расчетов.

Вариант 1

Вариант 2

Вариант 3

Вариант 4

Вариант 5

Вариант 6

Вариант 7

Вариант 0

```
M0 := | V ← 0
        | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        |   Vh,0 ← floor(√0.5 · √(Zh + Xh) · 102)
        | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        |   Vh,1 ← floor(√0.5 · √(Zh + Xh) · 103)
        | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        |   Vh,2 ← floor(√0.5 · √(Zh + Xh) · 104)
        | V
NO := | V ← 0
        | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        |   Vh,0 ← floor(√(Zh + Yh) · 102)
        | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        |   Vh,1 ← floor(√(Zh + Yh) · 103)
        | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        |   Vh,2 ← floor(√(Zh + Yh) · 104)
        | V
```

Вариант 1

```

M1 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h - X_h} \cdot 10^2$ )
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h - X_h} \cdot 10^3$ )
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h - X_h} \cdot 10^4$ )
      |     V
N1 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ← floor( $\sqrt{Z_h - Y_h} \cdot 10^2$ )
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ← floor( $\sqrt{Z_h - Y_h} \cdot 10^3$ )
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ← floor( $\sqrt{Z_h - Y_h} \cdot 10^4$ )
      |     V

```

Вариант 2

```

M2 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h + X_h} \cdot 10^2$ )
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h + X_h} \cdot 10^3$ )
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h + X_h} \cdot 10^4$ )
      |     V

```

```

N2 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ← floor( $\sqrt{Z_h - Y_h} \cdot 10^2$ )
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ← floor( $\sqrt{Z_h - Y_h} \cdot 10^3$ )
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ← floor( $\sqrt{Z_h - Y_h} \cdot 10^4$ )
      |     V

```

Вариант 3

```

M3 := V ← 0
      for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        Vh,0 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h - X_h} \cdot 10^2$ )
      for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        Vh,1 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h - X_h} \cdot 10^3$ )
      for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        Vh,2 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h - X_h} \cdot 10^4$ )
      V
N3 := V ← 0
      for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        Vh,0 ← floor( $\sqrt{Z_h + Y_h} \cdot 10^2$ )
      for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        Vh,1 ← floor( $\sqrt{Z_h + Y_h} \cdot 10^3$ )
      for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        Vh,2 ← floor( $\sqrt{Z_h + Y_h} \cdot 10^4$ )
      V

```

Вариант 4

```

M4 := V ← 0
      for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        Vh,0 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h + Y_h} \cdot 10^2$ )
      for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        Vh,1 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h + Y_h} \cdot 10^3$ )
      for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        Vh,2 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h + Y_h} \cdot 10^4$ )
      V
N4 := V ← 0
      for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        Vh,0 ← floor( $\sqrt{Z_h + X_h} \cdot 10^2$ )
      for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        Vh,1 ← floor( $\sqrt{Z_h + X_h} \cdot 10^3$ )
      for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
        Vh,2 ← floor( $\sqrt{Z_h + X_h} \cdot 10^4$ )
      V

```

Вариант 5

```

M5 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h - Y_h} \cdot 10^2$ )
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h - Y_h} \cdot 10^3$ )
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h - Y_h} \cdot 10^4$ )
      |     V
N5 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ← floor( $\sqrt{Z_h - X_h} \cdot 10^2$ )
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ← floor( $\sqrt{Z_h - X_h} \cdot 10^3$ )
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ← floor( $\sqrt{Z_h - X_h} \cdot 10^4$ )
      |     V

```

Вариант 6

```

M6 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h - Y_h} \cdot 10^2$ )
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h - Y_h} \cdot 10^3$ )
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ← floor( $\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{Z_h - Y_h} \cdot 10^4$ )
      |     V
N6 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ← floor( $\sqrt{Z_h + X_h} \cdot 10^2$ )
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ← floor( $\sqrt{Z_h + X_h} \cdot 10^3$ )
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ← floor( $\sqrt{Z_h + X_h} \cdot 10^4$ )
      |     V

```

Вариант 7


```

M7 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ← floor( $\sqrt{0.5 \cdot \sqrt{Z_h + Y_h} \cdot 10^2}$ )
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ← floor( $\sqrt{0.5 \cdot \sqrt{Z_h + Y_h} \cdot 10^3}$ )
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ← floor( $\sqrt{0.5 \cdot \sqrt{Z_h + Y_h} \cdot 10^4}$ )
      | V

```

```

N7 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ← floor( $\sqrt{Z_h - X_h} \cdot 10^2$ )
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ← floor( $\sqrt{Z_h - X_h} \cdot 10^3$ )
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ← floor( $\sqrt{Z_h - X_h} \cdot 10^4$ )
      | V

```

```

X2 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M2_{h,0} \cdot N2_{h,0} - (N2_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M2_{h,1} \cdot N2_{h,1} - (N2_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M2_{h,2} \cdot N2_{h,2} - (N2_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      | V

```

```

Y2 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{[-2 \cdot M2_{h,0} \cdot N2_{h,0} + 2 \cdot (M2_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{[-2 \cdot M2_{h,1} \cdot N2_{h,1} + 2 \cdot (M2_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{[-2 \cdot M2_{h,2} \cdot N2_{h,2} + 2 \cdot (M2_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      | V

```

```

Y0 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M0_{h,0} \cdot N0_{h,0} - 2 \cdot (M0_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M0_{h,1} \cdot N0_{h,1} - 2 \cdot (M0_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M0_{h,2} \cdot N0_{h,2} - 2 \cdot (M0_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      | V

```

```

Y1 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M1_{h,0} \cdot N1_{h,0} + 2 \cdot (M1_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M1_{h,1} \cdot N1_{h,1} + 2 \cdot (M1_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M1_{h,2} \cdot N1_{h,2} + 2 \cdot (M1_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      | V

```

```

X4 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   
$$V_{h,0} \leftarrow \frac{[2 \cdot M_{h,0}^4 \cdot N_{h,0}^4 - 2 \cdot (M_{h,0}^4)^2]}{10^4}$$

      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     
$$V_{h,1} \leftarrow \frac{[2 \cdot M_{h,1}^4 \cdot N_{h,1}^4 - 2 \cdot (M_{h,1}^4)^2]}{10^6}$$

      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       
$$V_{h,2} \leftarrow \frac{[2 \cdot M_{h,2}^4 \cdot N_{h,2}^4 - 2 \cdot (M_{h,2}^4)^2]}{10^8}$$

      | V

```

```

Y4 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   
$$V_{h,0} \leftarrow \frac{[2 \cdot M_{h,0}^4 \cdot N_{h,0}^4 - (N_{h,0}^4)^2]}{10^4}$$

      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     
$$V_{h,1} \leftarrow \frac{[2 \cdot M_{h,1}^4 \cdot N_{h,1}^4 - (N_{h,1}^4)^2]}{10^6}$$

      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       
$$V_{h,2} \leftarrow \frac{[2 \cdot M_{h,2}^4 \cdot N_{h,2}^4 - (N_{h,2}^4)^2]}{10^8}$$

      | V

```

```

X5 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   
$$V_{h,0} \leftarrow \frac{[2 \cdot M_{h,0}^5 \cdot N_{h,0}^5 + 2 \cdot (M_{h,0}^5)^2]}{10^4}$$

      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     
$$V_{h,1} \leftarrow \frac{[2 \cdot M_{h,1}^5 \cdot N_{h,1}^5 + 2 \cdot (M_{h,1}^5)^2]}{10^6}$$

      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       
$$V_{h,2} \leftarrow \frac{[2 \cdot M_{h,2}^5 \cdot N_{h,2}^5 + 2 \cdot (M_{h,2}^5)^2]}{10^8}$$

      | V

```

```

Y5 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M5_{h,0} \cdot N5_{h,0} + (N5_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M5_{h,1} \cdot N5_{h,1} + (N5_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M5_{h,2} \cdot N5_{h,2} + (N5_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |   V

```

```

X0 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M0_{h,0} \cdot N0_{h,0} - (N0_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M0_{h,1} \cdot N0_{h,1} - (N0_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M0_{h,2} \cdot N0_{h,2} - (N0_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |   V

```

```

X1 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M1_{h,0} \cdot N1_{h,0} + (N1_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M1_{h,1} \cdot N1_{h,1} + (N1_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M1_{h,2} \cdot N1_{h,2} + (N1_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |   V

```

```

X3 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   
$$V_{h,0} \leftarrow \frac{[-2 \cdot M3_{h,0} \cdot N3_{h,0} + (N3_{h,0})^2]}{10^4}$$

      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     
$$V_{h,1} \leftarrow \frac{[-2 \cdot M3_{h,1} \cdot N3_{h,1} + (N3_{h,1})^2]}{10^6}$$

      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       
$$V_{h,2} \leftarrow \frac{[-2 \cdot M3_{h,2} \cdot N3_{h,2} + (N3_{h,2})^2]}{10^8}$$

      |   V

```

```

Y3 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   
$$V_{h,0} \leftarrow \frac{[2 \cdot M3_{h,0} \cdot N3_{h,0} - 2 \cdot (M3_{h,0})^2]}{10^4}$$

      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     
$$V_{h,1} \leftarrow \frac{[2 \cdot M3_{h,1} \cdot N3_{h,1} - 2 \cdot (M3_{h,1})^2]}{10^6}$$

      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       
$$V_{h,2} \leftarrow \frac{[2 \cdot M3_{h,2} \cdot N3_{h,2} - 2 \cdot (M3_{h,2})^2]}{10^8}$$

      |   V

```

```

X6 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   
$$V_{h,0} \leftarrow \frac{[2 \cdot M6_{h,0} \cdot N6_{h,0} - 2 \cdot (M6_{h,0})^2]}{10^4}$$

      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     
$$V_{h,1} \leftarrow \frac{[2 \cdot M6_{h,1} \cdot N6_{h,1} - 2 \cdot (M6_{h,1})^2]}{10^6}$$

      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       
$$V_{h,2} \leftarrow \frac{[2 \cdot M6_{h,2} \cdot N6_{h,2} - 2 \cdot (M6_{h,2})^2]}{10^8}$$

      |   V

```

```

Y6 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{[-2 \cdot M6_{h,0} \cdot N6_{h,0} + (N6_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{[-2 \cdot M6_{h,1} \cdot N6_{h,1} + (N6_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{[-2 \cdot M6_{h,2} \cdot N6_{h,2} + (N6_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |   V

```

```

X7 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{[-2 \cdot M7_{h,0} \cdot N7_{h,0} + 2 \cdot (M7_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{[-2 \cdot M7_{h,1} \cdot N7_{h,1} + 2 \cdot (M7_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{[-2 \cdot M7_{h,2} \cdot N7_{h,2} + 2 \cdot (M7_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |   V

```

```

Y7 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{[2 \cdot M7_{h,0} \cdot N7_{h,0} - (N7_{h,0})^2]}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{[2 \cdot M7_{h,1} \cdot N7_{h,1} - (N7_{h,1})^2]}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{[2 \cdot M7_{h,2} \cdot N7_{h,2} - (N7_{h,2})^2]}{10^8}$ 
      |   V

```

```

A1 := augment(X0, X1)
A2 := augment(X2, X3)
A3 := augment(X4, X5)

```

```

A4 := augment(X6, X7)
A5 := augment(A1, A2)
A6 := augment(A3, A4)
A7 := augment(A5, A6)
A21 := augment(Y0, Y1)
A22 := augment(Y2, Y3)
A23 := augment(Y4, Y5)
A24 := augment(Y6, Y7)
A25 := augment(A21, A22)

```

```

Z2 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{-2 \cdot M2_{h,0} \cdot N2_{h,0} + 2 \cdot (M2_{h,0})^2 + (N2_{h,0})^2}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{-2 \cdot M2_{h,1} \cdot N2_{h,1} + 2 \cdot (M2_{h,1})^2 + (N2_{h,1})^2}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{-2 \cdot M2_{h,2} \cdot N2_{h,2} + 2 \cdot (M2_{h,2})^2 + (N2_{h,2})^2}{10^8}$ 
      | V
Z0 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{-2 \cdot M0_{h,0} \cdot N0_{h,0} + 2 \cdot (M0_{h,0})^2 + (N0_{h,0})^2}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{-2 \cdot M0_{h,1} \cdot N0_{h,1} + 2 \cdot (M0_{h,1})^2 + (N0_{h,1})^2}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{-2 \cdot M0_{h,2} \cdot N0_{h,2} + 2 \cdot (M0_{h,2})^2 + (N0_{h,2})^2}{10^8}$ 
      | V

```

```

A26 := augment(A23, A24)

```

```
Z1 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{2 \cdot M1_{h,0} \cdot N1_{h,0} + 2 \cdot (M1_{h,0})^2 + (N1_{h,0})^2}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{2 \cdot M1_{h,1} \cdot N1_{h,1} + 2 \cdot (M1_{h,1})^2 + (N1_{h,1})^2}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{2 \cdot M1_{h,2} \cdot N1_{h,2} + 2 \cdot (M1_{h,2})^2 + (N1_{h,2})^2}{10^8}$ 
      | V
```

```
Z3 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{-2 \cdot M3_{h,0} \cdot N3_{h,0} + 2 \cdot (M3_{h,0})^2 + (N3_{h,0})^2}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{-2 \cdot M3_{h,1} \cdot N3_{h,1} + 2 \cdot (M3_{h,1})^2 + (N3_{h,1})^2}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{-2 \cdot M3_{h,2} \cdot N3_{h,2} + 2 \cdot (M3_{h,2})^2 + (N3_{h,2})^2}{10^8}$ 
      | V
```

```
Z4 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh,0 ←  $\frac{-2 \cdot M4_{h,0} \cdot N4_{h,0} + 2 \cdot (M4_{h,0})^2 + (N4_{h,0})^2}{10^4}$ 
      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     Vh,1 ←  $\frac{-2 \cdot M4_{h,1} \cdot N4_{h,1} + 2 \cdot (M4_{h,1})^2 + (N4_{h,1})^2}{10^6}$ 
      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       Vh,2 ←  $\frac{-2 \cdot M4_{h,2} \cdot N4_{h,2} + 2 \cdot (M4_{h,2})^2 + (N4_{h,2})^2}{10^8}$ 
      | V
```



```
Z5 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   
$$V_{h,0} \leftarrow \frac{2 \cdot M5_{h,0} \cdot N5_{h,0} + 2 \cdot (M5_{h,0})^2 + (N5_{h,0})^2}{10^4}$$

      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     
$$V_{h,1} \leftarrow \frac{2 \cdot M5_{h,1} \cdot N5_{h,1} + 2 \cdot (M5_{h,1})^2 + (N5_{h,1})^2}{10^6}$$

      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       
$$V_{h,2} \leftarrow \frac{2 \cdot M5_{h,2} \cdot N5_{h,2} + 2 \cdot (M5_{h,2})^2 + (N5_{h,2})^2}{10^8}$$

      |   V
```

```
Z7 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   
$$V_{h,0} \leftarrow \frac{-2 \cdot M7_{h,0} \cdot N7_{h,0} + 2 \cdot (M7_{h,0})^2 + (N7_{h,0})^2}{10^4}$$

      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     
$$V_{h,1} \leftarrow \frac{-2 \cdot M7_{h,1} \cdot N7_{h,1} + 2 \cdot (M7_{h,1})^2 + (N7_{h,1})^2}{10^6}$$

      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       
$$V_{h,2} \leftarrow \frac{-2 \cdot M7_{h,2} \cdot N7_{h,2} + 2 \cdot (M7_{h,2})^2 + (N7_{h,2})^2}{10^8}$$

      |   V
```

```
Z6 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   
$$V_{h,0} \leftarrow \frac{-2 \cdot M6_{h,0} \cdot N6_{h,0} + 2 \cdot (M6_{h,0})^2 + (N6_{h,0})^2}{10^4}$$

      |   for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |     
$$V_{h,1} \leftarrow \frac{-2 \cdot M6_{h,1} \cdot N6_{h,1} + 2 \cdot (M6_{h,1})^2 + (N6_{h,1})^2}{10^6}$$

      |     for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |       
$$V_{h,2} \leftarrow \frac{-2 \cdot M6_{h,2} \cdot N6_{h,2} + 2 \cdot (M6_{h,2})^2 + (N6_{h,2})^2}{10^8}$$

      |   V
```

A27 := augment(A25, A26)

x_j

№ точки	0	1	2	3	4	5	6	7
$A_7^T =$	1.979	3.993	11.008	17.968	16.939	13.932	8.971	1.979
	1.999	3.998	11.003	17.998	16.994	13.992	9.002	2.003
	2	4	11.002	17.997	17.003	13.999	9.004	2.003
	1.963	3.993	10.93	17.907	16.875	13.867	8.915	1.963
	1.998	3.998	10.996	17.989	16.996	13.993	8.996	1.999
	2	4	11.001	17.996	17.003	13.999	9.004	2.003
	1.979	3.993	10.966	17.968	16.939	13.932	8.971	1.979
	1.999	3.998	10.999	17.995	16.996	13.993	9.002	2.001
	2	4	11.002	17.997	17.003	13.999	9.004	2.003
	2.03	3.993	11.008	18.087	17.045	14.018	9.034	2.03
	2.005	3.998	11.003	17.998	17.005	14.001	9.002	2.003
	2.001	4.001	11.003	17.997	17.004	14	9.005	2.003
	1.991	3.991	11.004	18.017	17.025	13.984	9.005	1.991
	1.999	3.997	11	17.997	17.004	13.999	9.004	2.003
	2	4	11.002	17.997	17.004	14	9.004	2.003
	1.991	3.978	10.92	17.933	16.95	13.877	8.92	1.991
	1.998	3.996	11	17.984	16.997	13.989	8.999	1.999
	2	4	11.002	17.996	17.004	13.999	9.004	2.003
	1.991	3.991	10.946	17.976	16.995	13.969	9	1.991
	1.999	3.997	11	17.992	17.001	13.998	9.003	2.001
	2	4	11.002	17.997	17.004	14	9.004	2.003
	1.991	4.052	10.92	17.933	16.95	13.984	9.005	1.991
	2.002	4.003	11	17.997	16.997	13.999	8.999	2.003
	2.001	4.001	11.002	17.997	17.005	14	9.004	2.003

№ точки	Y_j							
	0	1	2	3	4	5	6	7
	3.006	8.995	15.99	12.992	9.01	3.996	1.02	3.006
	3	8.998	15.998	12.992	9.006	4.005	0.998	3.002
	2.999	9.001	16.003	12.997	9.002	4	1.001	3.003
	2.955	8.995	15.949	12.874	8.904	3.91	0.957	2.955
	2.995	8.998	15.994	12.989	8.997	3.997	0.997	3
	2.999	9	16.002	12.997	9.002	3.999	1	3.003
	3.006	8.995	16.068	12.992	9.01	3.996	1.02	3.006
	3	8.998	16.006	13.001	8.997	3.997	1.004	3.005
	2.999	9.001	16.003	12.998	9.002	3.999	1	3.003
	2.99	8.995	15.99	12.931	8.946	3.931	0.963	2.99
	2.998	8.998	15.998	12.992	8.999	3.998	0.998	3.002
	2.999	9.001	16.003	12.997	9.002	4	1	3.003
	2.974	9.002	15.924	12.934	8.91	3.952	0.978	2.974
	2.999	9.001	15.999	12.997	8.994	3.997	0.995	3.002
	3	9.001	16.002	12.998	9.002	4	1	3.003
	2.974	8.941	15.95	12.976	8.955	3.937	0.973	2.974
	2.995	8.995	15.999	12.993	8.998	3.996	0.999	2.999
	2.999	9	16.002	12.997	9.001	3.999	1	3.003
	2.974	9.002	16.034	13.06	9.03	4.058	1.063	2.974
	2.999	9.001	15.999	13.01	9.006	4.008	1.003	3.006
	3	9.001	16.003	12.999	9.002	4	1	3.003
	2.974	8.989	15.95	12.976	8.955	3.952	0.978	2.974
	2.998	9	15.999	12.997	8.998	3.997	0.999	3.002
	3	9.001	16.002	12.998	9.002	4	1	3.003

- Q1 := augment(Z0,Z1)
- Q2 := augment(Z2,Z3)
- Q3 := augment(Z4,Z5)
- Q4 := augment(Z6,Z7)
- Q5 := augment(Q1,Q2)
- Q6 := augment(Q3,Q4)
- Q7 := augment(Q5,Q6)

№ точки	Z_i							
	0	1	2	3	4	5	6	7
3.599	9.841	19.413	22.173	19.186	14.494	9.029	3.599	
3.605	9.846	19.417	22.197	19.233	14.554	9.058	3.608	
3.605	9.85	19.42	22.2	19.239	14.559	9.06	3.61	
3.548	9.841	19.335	22.055	19.08	14.408	8.966	3.548	
3.6	9.846	19.409	22.188	19.231	14.553	9.052	3.605	
3.605	9.849	19.419	22.199	19.239	14.559	9.06	3.61	
3.599	9.841	19.454	22.173	19.186	14.494	9.029	3.599	
3.605	9.846	19.421	22.2	19.231	14.553	9.058	3.61	
3.605	9.85	19.42	22.2	19.239	14.559	9.06	3.61	
3.615	9.841	19.413	22.234	19.25	14.559	9.086	3.615	
3.607	9.846	19.417	22.197	19.239	14.561	9.058	3.608	
3.606	9.85	19.42	22.2	19.24	14.56	9.06	3.61	
3.579	9.847	19.356	22.179	19.215	14.532	9.058	3.579	
3.604	9.849	19.416	22.199	19.236	14.559	9.059	3.609	
3.606	9.85	19.419	22.2	19.24	14.56	9.06	3.61	
3.579	9.786	19.33	22.136	19.17	14.425	8.973	3.579	
3.6	9.843	19.416	22.186	19.232	14.548	9.055	3.604	
3.605	9.849	19.419	22.199	19.239	14.559	9.06	3.61	
3.579	9.847	19.414	22.22	19.245	14.547	9.063	3.579	
3.604	9.849	19.416	22.203	19.239	14.56	9.059	3.611	
3.606	9.85	19.42	22.2	19.24	14.56	9.06	3.61	
3.579	9.861	19.33	22.136	19.17	14.532	9.058	3.579	
3.605	9.85	19.416	22.199	19.232	14.559	9.055	3.609	
3.606	9.85	19.419	22.2	19.24	14.56	9.06	3.61	

$$DX := \begin{cases} V \leftarrow 0 \\ \text{for } h \in 0..(\text{rows}(R) - 1) \\ \quad V_h \leftarrow \text{var}[(A7^T)^{(h)}] \\ V \end{cases}$$

$$DY := \begin{cases} V \leftarrow 0 \\ \text{for } h \in 0..(\text{rows}(R) - 1) \\ \quad V_h \leftarrow \text{var}[(A27^T)^{(h)}] \\ V \end{cases}$$

$$DZ := \begin{cases} V \leftarrow 0 \\ \text{for } h \in 0..(\text{rows}(R) - 1) \\ \quad V_h \leftarrow \text{var}[(Q7^T)^{(h)}] \\ V \end{cases}$$

Дисперсия координат угловых точек

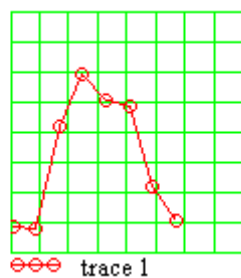
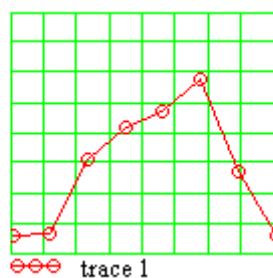
№ точки – номер строки

$$DX = \begin{pmatrix} 1.348 \times 10^{-4} \\ 1.511 \times 10^{-4} \\ 7.775 \times 10^{-4} \\ 1.042 \times 10^{-3} \\ 1.173 \times 10^{-3} \\ 1.442 \times 10^{-3} \\ 6.694 \times 10^{-4} \\ 1.454 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad DY = \begin{pmatrix} 1.61 \times 10^{-4} \\ 1.421 \times 10^{-4} \\ 7.813 \times 10^{-4} \\ 1.1 \times 10^{-3} \\ 9.416 \times 10^{-4} \\ 9.12 \times 10^{-4} \\ 4.009 \times 10^{-4} \\ 1.947 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad DZ = \begin{pmatrix} 2.105 \times 10^{-4} \\ 1.676 \times 10^{-4} \\ 9.924 \times 10^{-4} \\ 1.195 \times 10^{-3} \\ 1.382 \times 10^{-3} \\ 1.694 \times 10^{-3} \\ 6.927 \times 10^{-4} \\ 2.547 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

i := 0..7

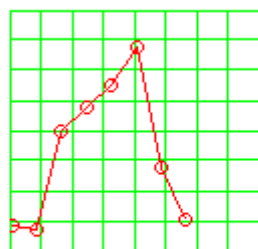
Дисперсии X

Дисперсии Y

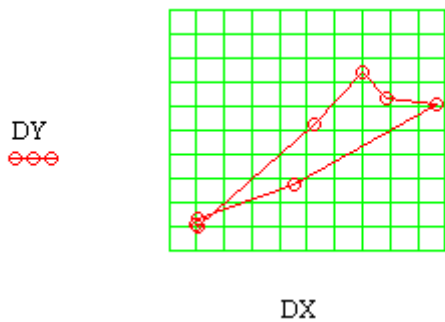


Дисперсии Z

DY = f(DX)

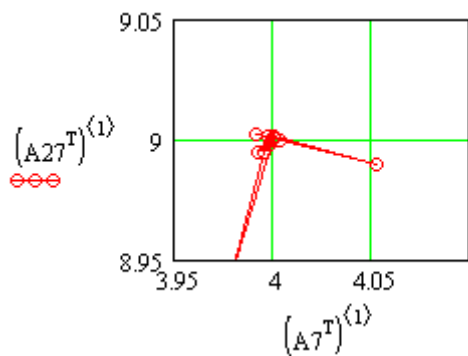
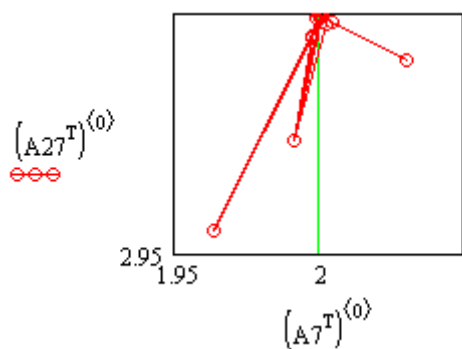


trace 1

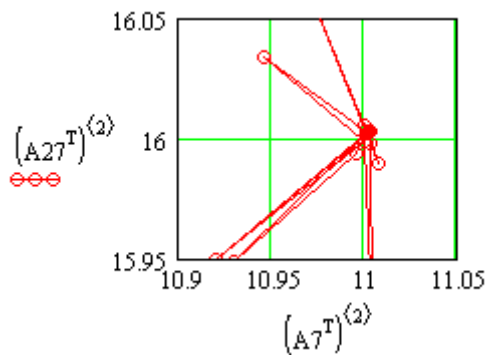


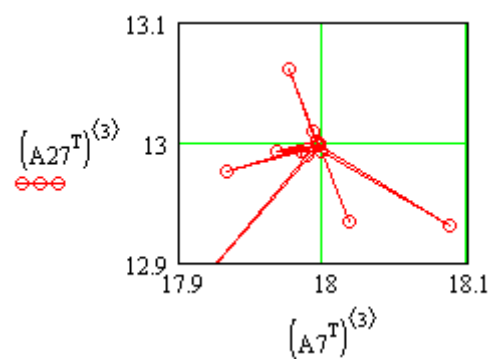
Возможные отклонения координат угловых точек
(координаты соседних рациональных точек)

Точка 0
Точка 1

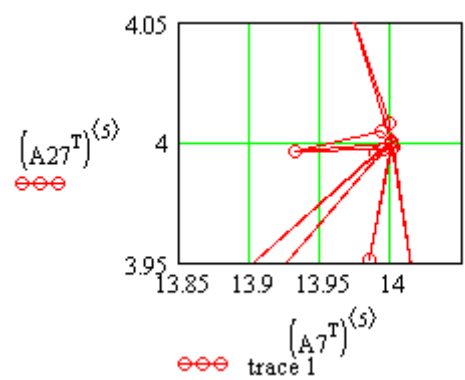
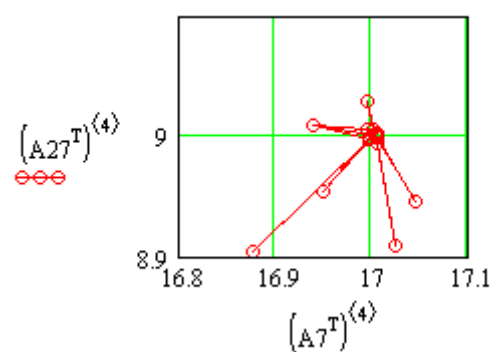


Точка 2
Точка 3

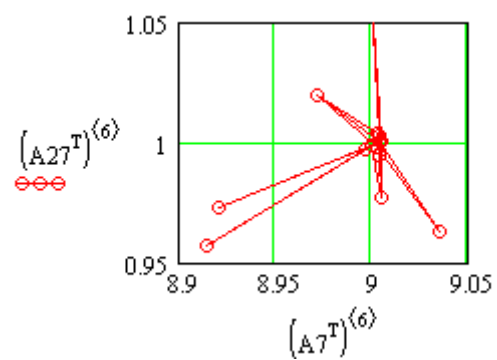


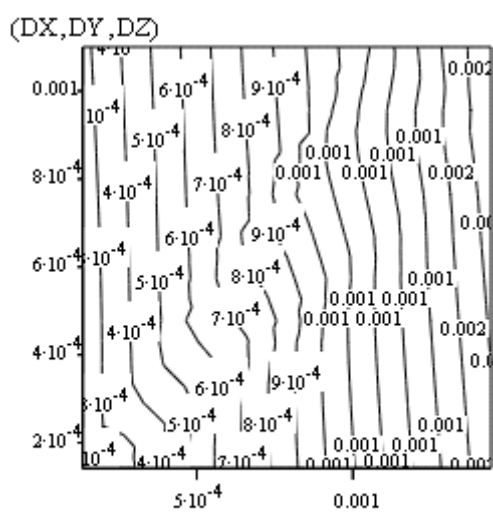
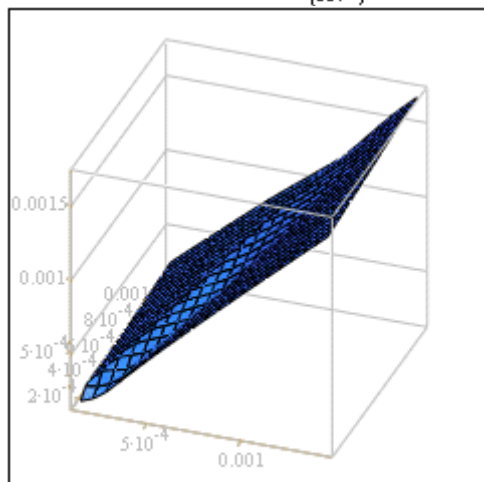
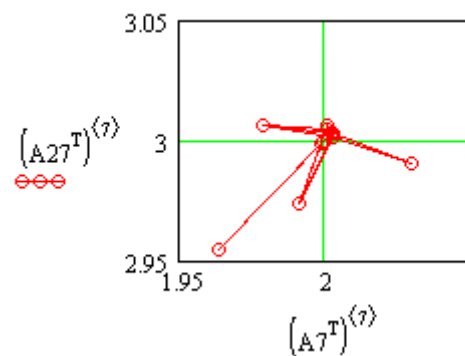


Точка 4
Точка 5



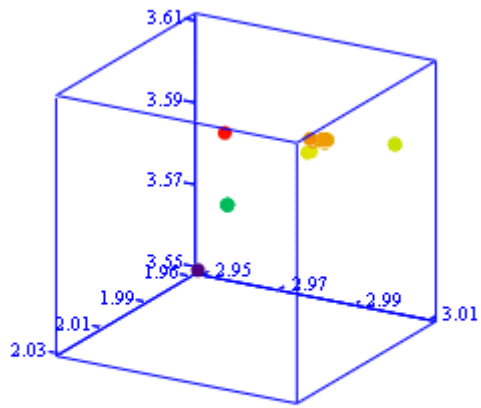
Точка 6
Точка 7



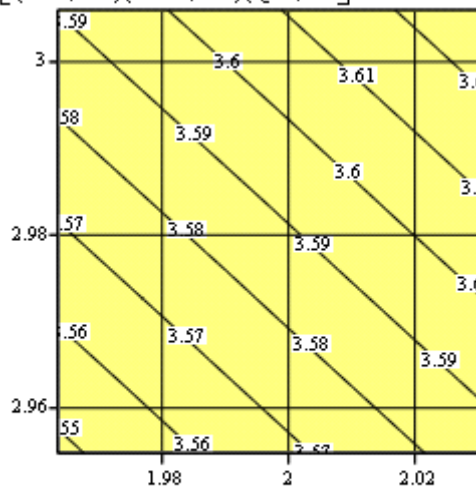


(DX,DY,DZ)

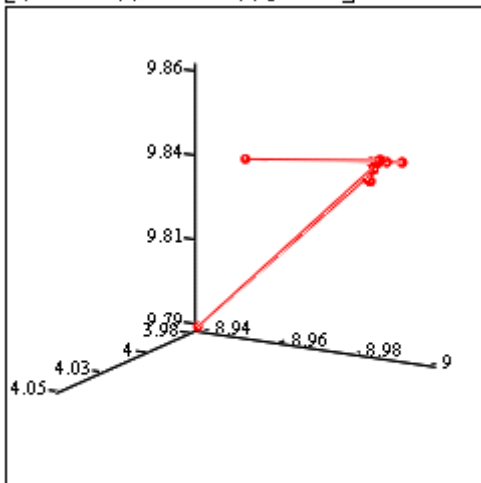
Трёхмерные графики



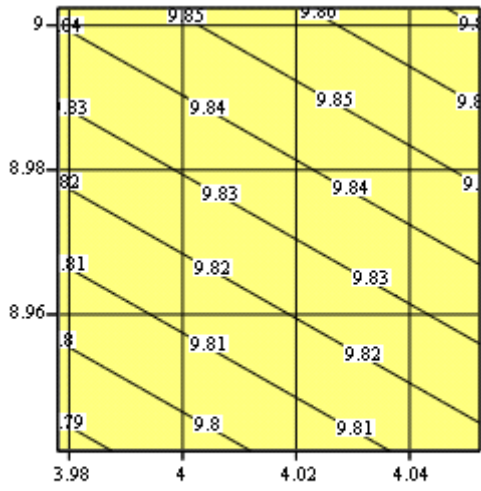
$$[(A_7T)^{(0)}, (A_{27}T)^{(0)}, (Q_7T)^{(0)}]$$



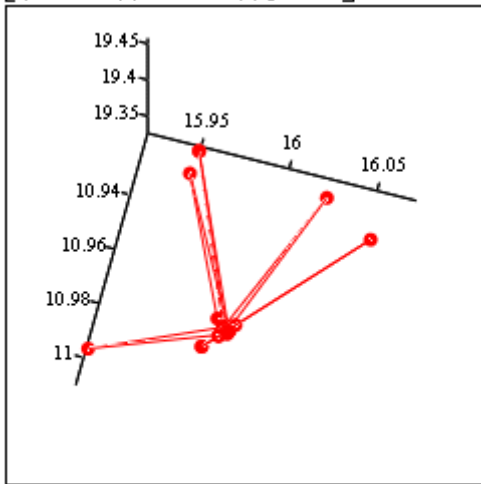
$$[(A_7T)^{(0)}, (A_{27}T)^{(0)}, (Q_7T)^{(0)}]$$



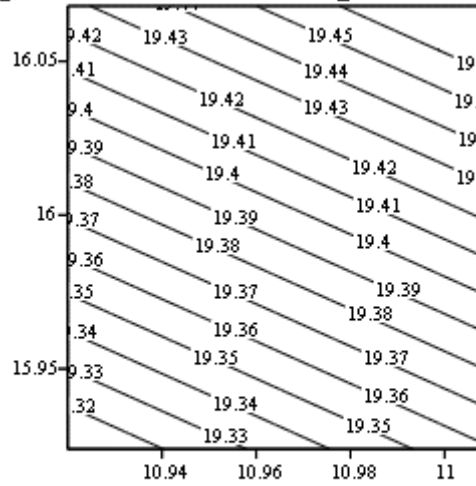
$$[(A_7T)^{(1)}, (A_{27}T)^{(1)}, (Q_7T)^{(1)}]$$



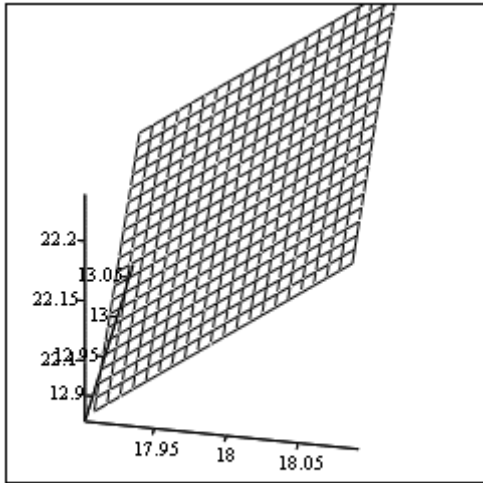
$$[(A_7^T)^{(1)}, (A_{27}^T)^{(1)}, (Q_7^T)^{(1)}]$$



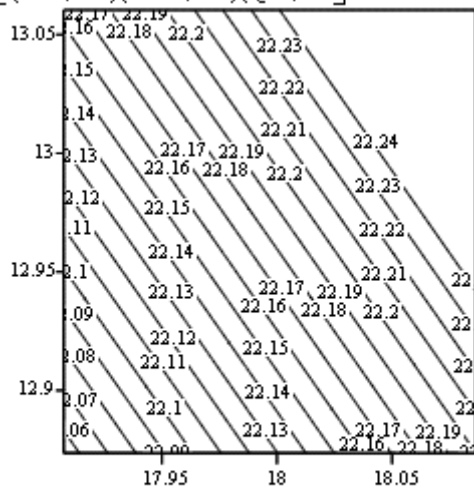
$$[(A_7^T)^{(2)}, (A_{27}^T)^{(2)}, (Q_7^T)^{(2)}]$$



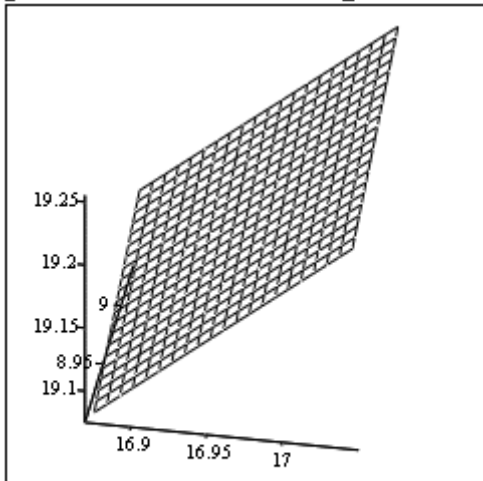
$$[(A_7^T)^{(2)}, (A_{27}^T)^{(2)}, (Q_7^T)^{(2)}]$$



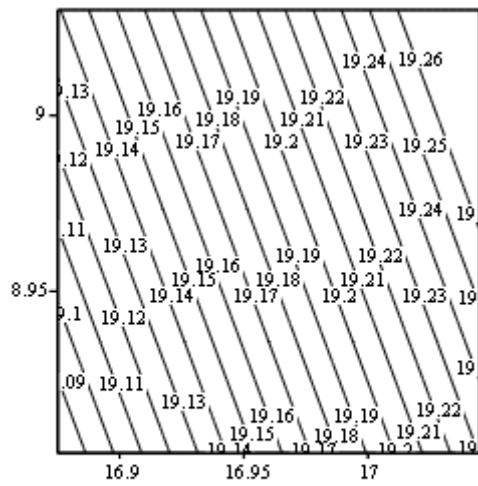
$$[(A_7^T)^{(3)}, (A_{27}^T)^{(3)}, (Q_7^T)^{(3)}]$$



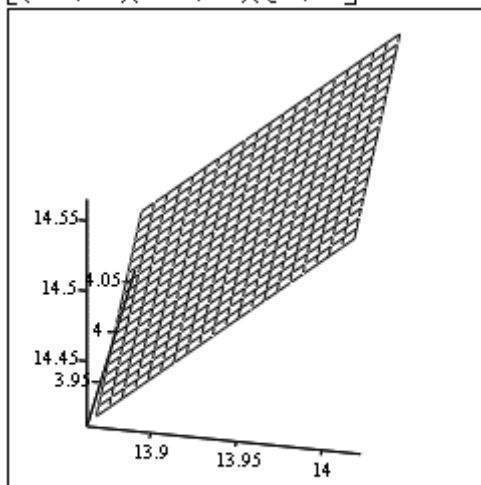
$$[(A_7^T)^{(3)}, (A_{27}^T)^{(3)}, (Q_7^T)^{(3)}]$$



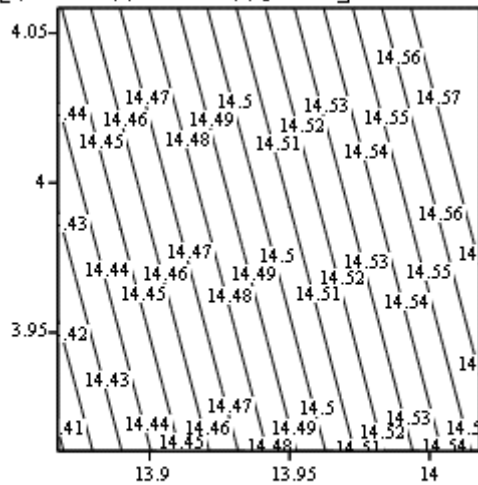
$$[(A_7^T)^{(4)}, (A_{27}^T)^{(4)}, (Q_7^T)^{(4)}]$$



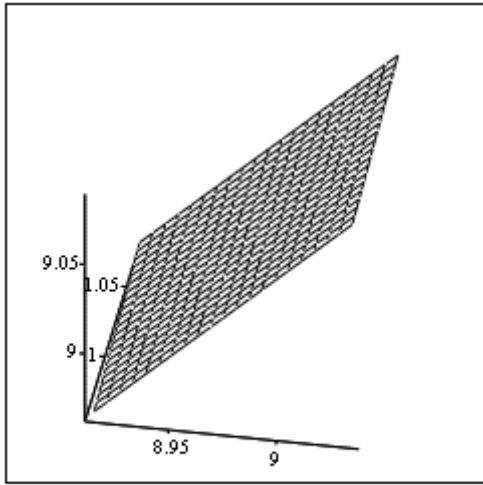
$$\left[(A_7T)^{(4)}, (A_{27}T)^{(4)}, (Q_7T)^{(4)} \right]$$



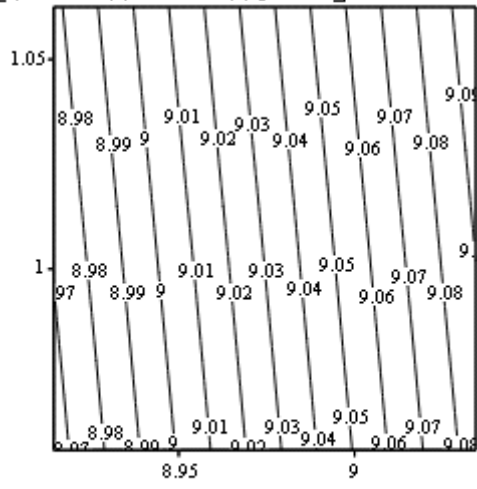
$$\left[(A_7T)^{(5)}, (A_{27}T)^{(5)}, (Q_7T)^{(5)} \right]$$



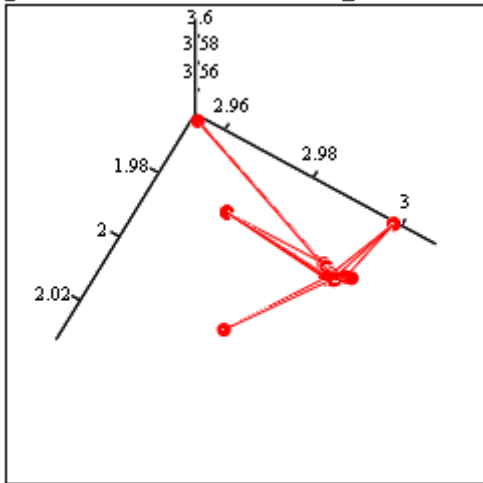
$$\left[(A_7T)^{(5)}, (A_{27}T)^{(5)}, (Q_7T)^{(5)} \right]$$



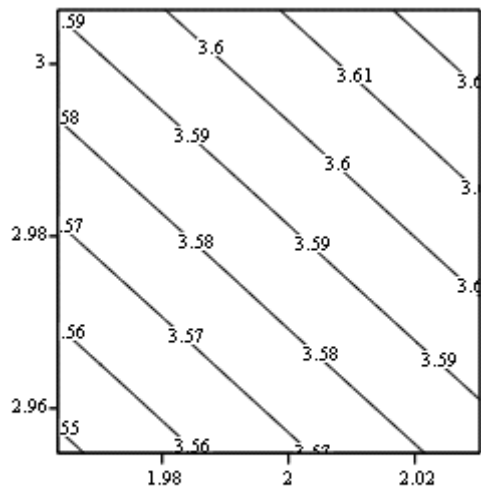
$$[(A_7T)^{(6)}, (A_{27}T)^{(6)}, (Q_7T)^{(6)}]$$



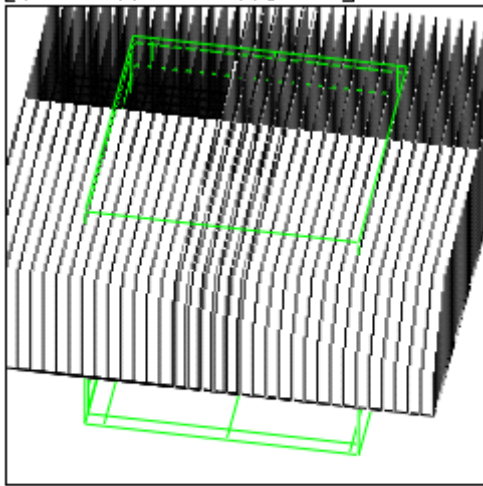
$$[(A_7T)^{(6)}, (A_{27}T)^{(6)}, (Q_7T)^{(6)}]$$



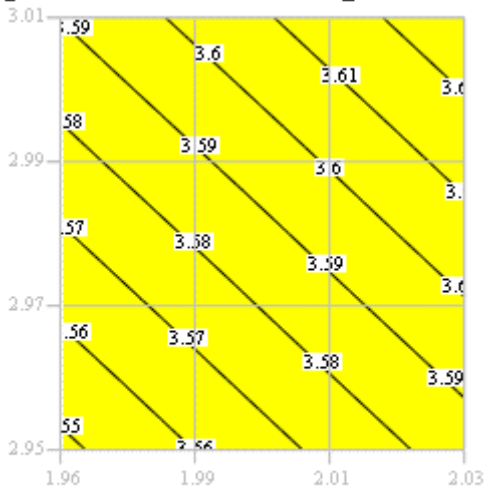
$$[(A_7T)^{(7)}, (A_{27}T)^{(7)}, (Q_7T)^{(7)}]$$



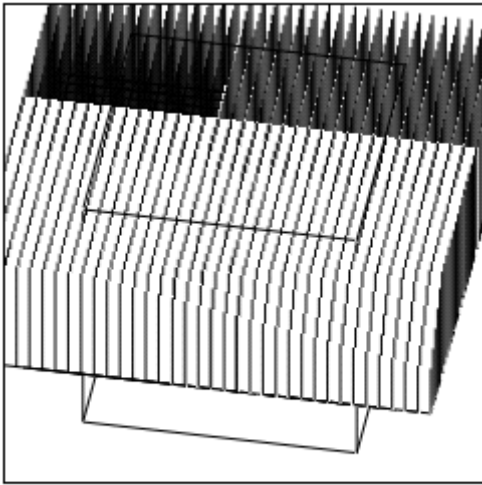
$$\left[(A_7T)^{(7)}, (A_{27}T)^{(7)}, (Q_7T)^{(7)} \right]$$



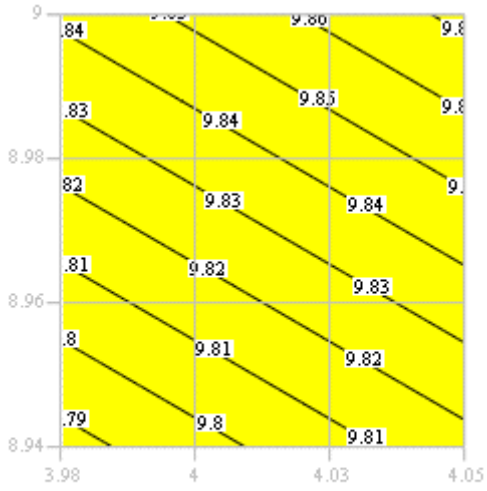
$$\left[(A_7T)^{(0)}, (A_{27}T)^{(0)}, (Q_7T)^{(0)} \right]$$



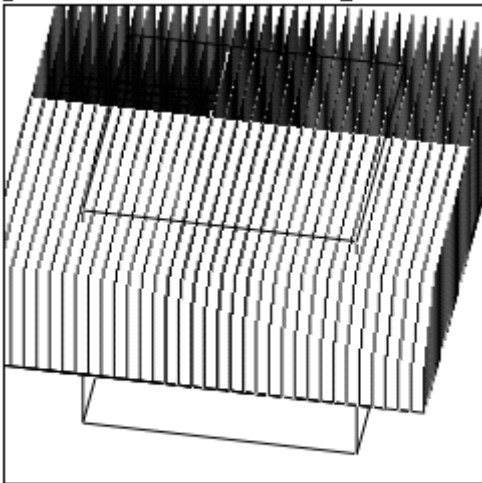
$$\left[(A_7T)^{(0)}, (A_{27}T)^{(0)}, (Q_7T)^{(0)} \right]$$



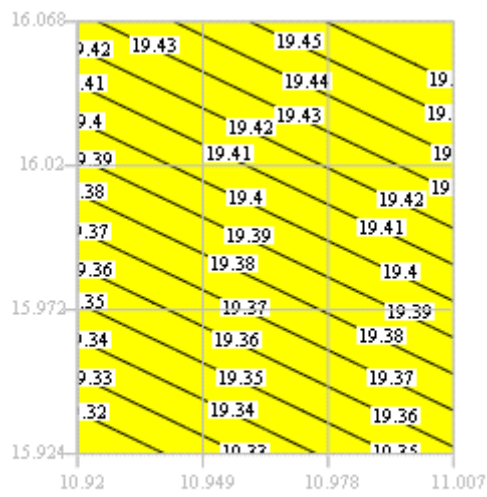
$$\left[(A_7^T)^{(1)}, (A_{27}^T)^{(1)}, (Q_7^T)^{(1)} \right]$$



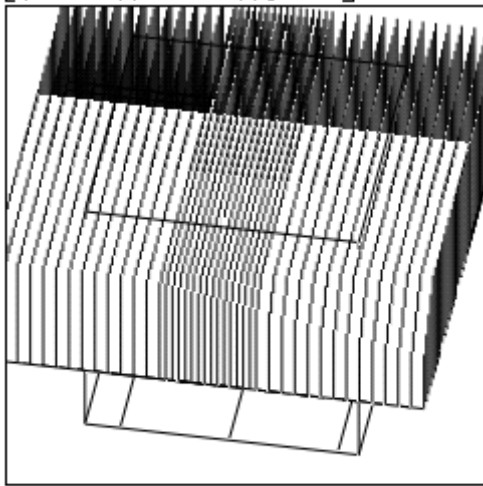
$$\left[(A_7^T)^{(1)}, (A_{27}^T)^{(1)}, (Q_7^T)^{(1)} \right]$$



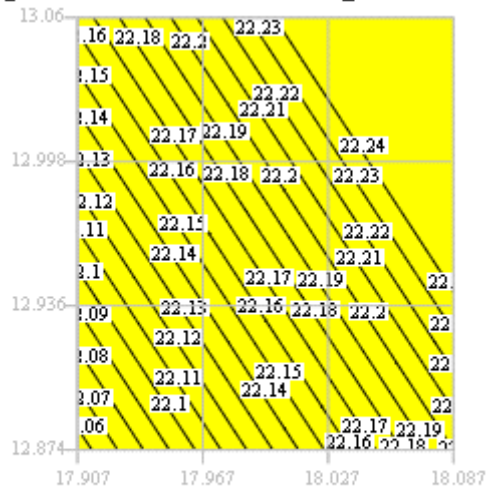
$$\left[(A_7^T)^{(2)}, (A_{27}^T)^{(2)}, (Q_7^T)^{(2)} \right]$$



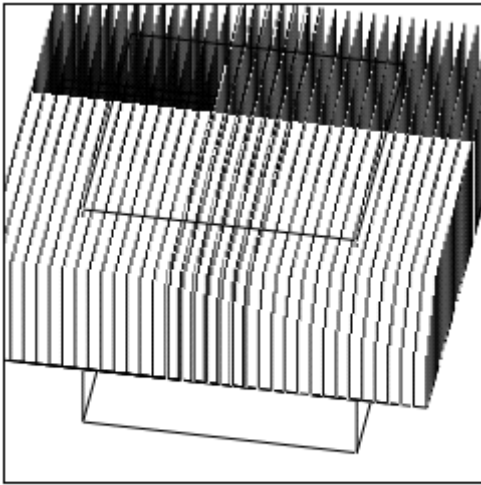
$$\left[(A_7^T)^{(2)}, (A_{27}^T)^{(2)}, (Q_7^T)^{(2)} \right]$$



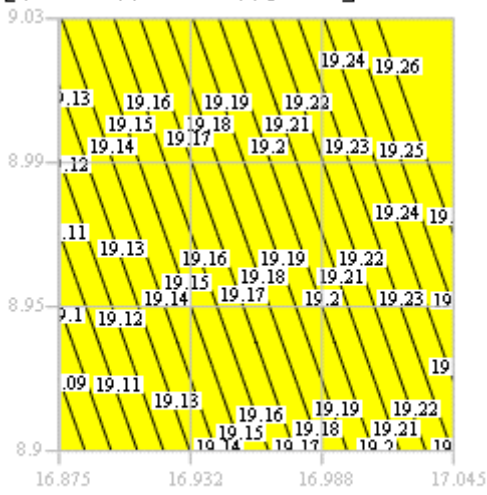
$$\left[(A_7^T)^{(3)}, (A_{27}^T)^{(3)}, (Q_7^T)^{(3)} \right]$$



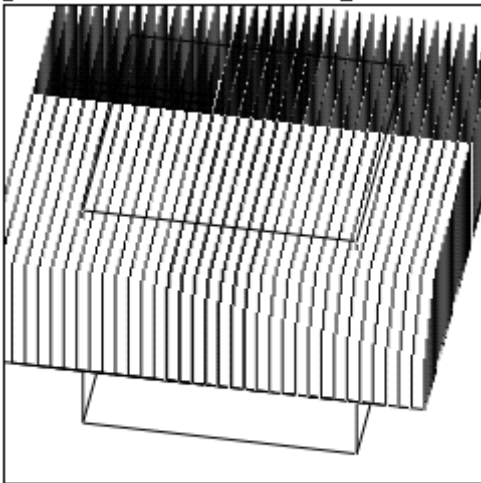
$$\left[(A_7^T)^{(3)}, (A_{27}^T)^{(3)}, (Q_7^T)^{(3)} \right]$$



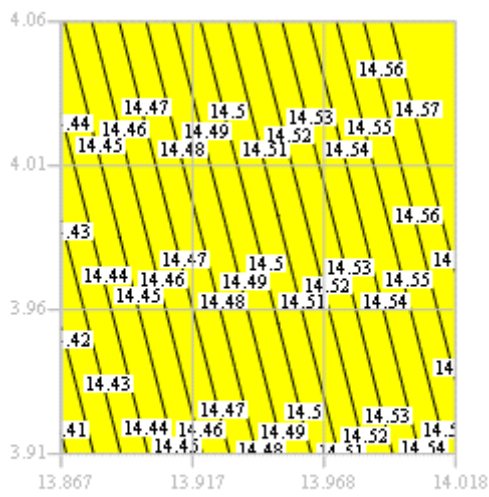
$$\left[(A_7T)^{(4)}, (A_{27}T)^{(4)}, (Q_7T)^{(4)} \right]$$



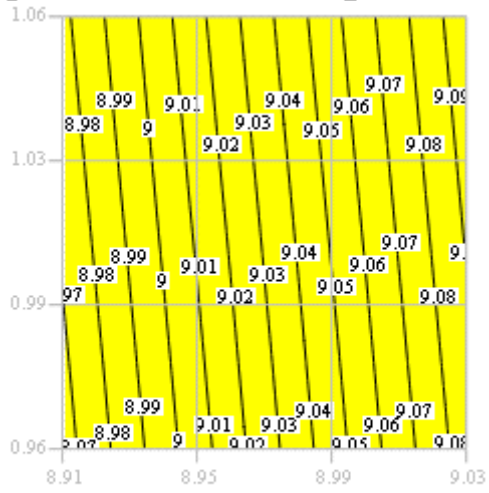
$$\left[(A_7T)^{(4)}, (A_{27}T)^{(4)}, (Q_7T)^{(4)} \right]$$



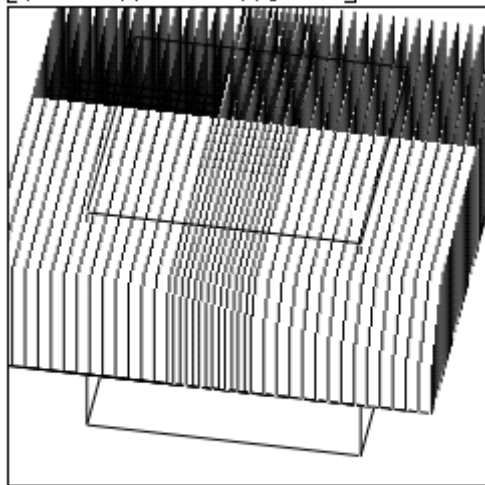
$$\left[(A_7T)^{(5)}, (A_{27}T)^{(5)}, (Q_7T)^{(5)} \right]$$



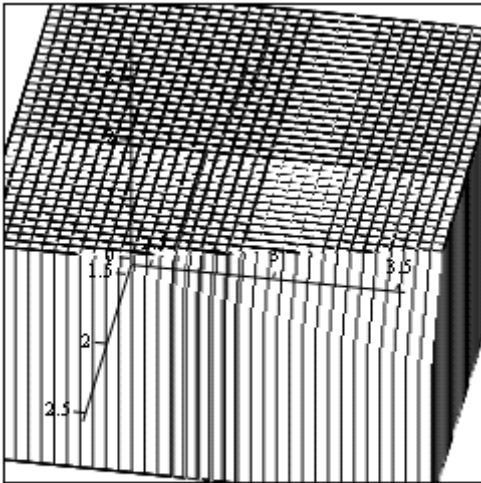
$$\left[(A_7^T)^{(5)}, (A_{27}^T)^{(5)}, (Q_7^T)^{(5)} \right]$$



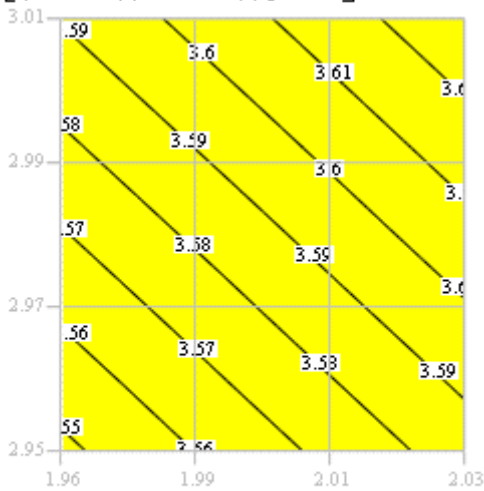
$$\left[(A_7^T)^{(6)}, (A_{27}^T)^{(6)}, (Q_7^T)^{(6)} \right]$$



$$\left[(A_7^T)^{(6)}, (A_{27}^T)^{(6)}, (Q_7^T)^{(6)} \right]$$



$$\left[(A_7T)^{(7)}, (A_{27}T)^{(7)}, (Q_7T)^{(7)} \right]$$



$$\left[(A_7T)^{(7)}, (A_{27}T)^{(7)}, (Q_7T)^{(7)} \right]$$

Вероятностные характеристики

$dnorm(x, \mu, \sigma)$ - плотность вероятности нормального распределения, задает вероятность попадания случайной величины X в малый интервал от X до $X+dX$.

$pnorm(x, \mu, \sigma)$ - функция нормального распределения, т.е. вероятность того, что случайная величина примет значение меньше или равное X .

$gnorm(M, \mu, \sigma)$ - вектор M независимых случайных чисел.

$dlogis(X, \mu, s)$ - логистическое распределение (s -параметр масштаба).

Точка 0

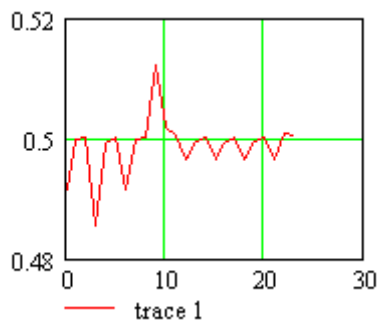
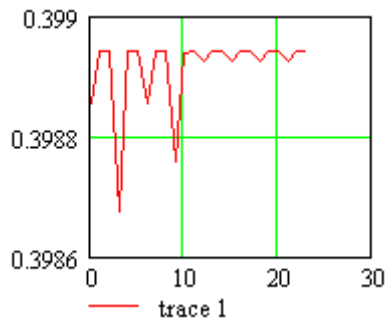
$i := 0..23$

Плотность вероятности
нормального распределения

X

Функция нормального
распределения

X

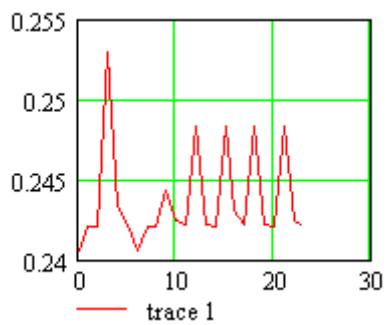


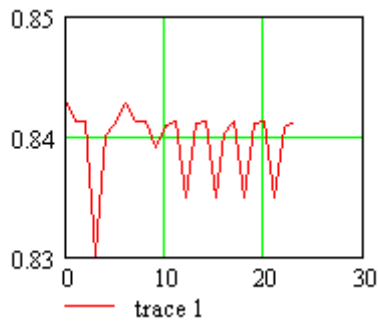
```

X0 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   vh ← [(A7T)(0)]h
      |   V
Z0 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   vh ← [(Q7T)(0)]h
      |   V
Y0 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   vh ← [(A27T)(0)]h
      |   V

```

Плотность вероятности
 нормального распределения
 Y
 Функция нормального
 распределения
 Y





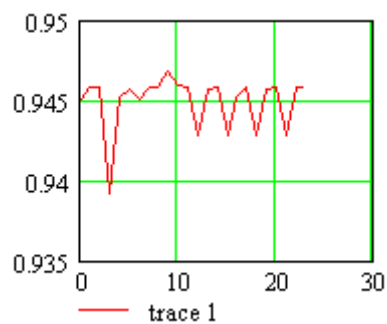
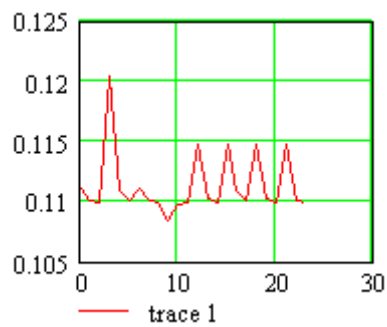
Плотность вероятности
нормального распределения

Z

Функция нормального
распределения

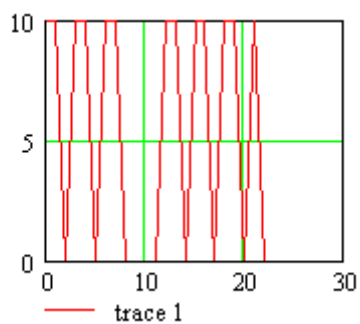
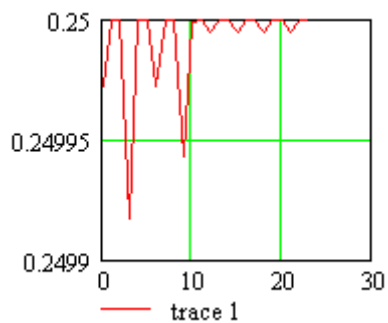
Z

```
X1 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   v_h ← [(A7T)^(1)]_h
      | V
Z1 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   v_h ← [(Q7T)^(1)]_h
      | V
```

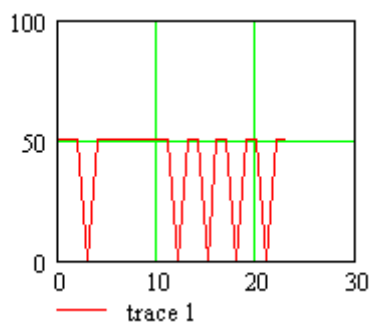
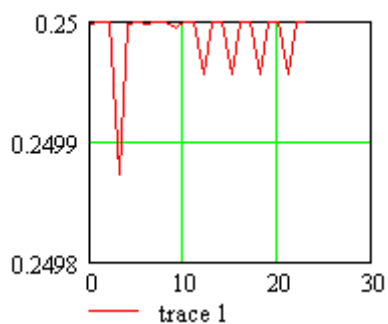


```
Y1 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   v_h ← [(A27T)^(1)]_h
      | V
```

Плотность вероятности
равномерного распределения
X
Логистическое распределение
X



Плотность вероятности
равномерного распределения
Y
Логистическое распределение
Y



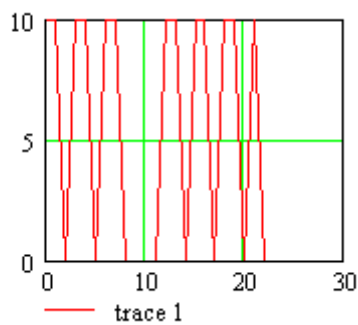
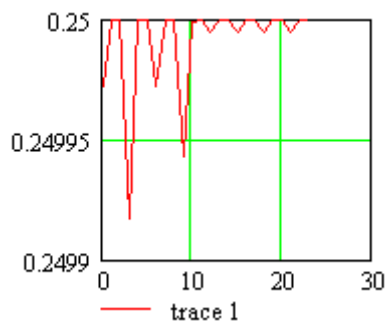
Плотность вероятности
равномерного распределения
Z

```

X2 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   V_h ← [(A7T)^(2)]_h
      | V
Y2 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   V_h ← [(A27T)^(2)]_h
      | V

```

Логистическое распределение
Z

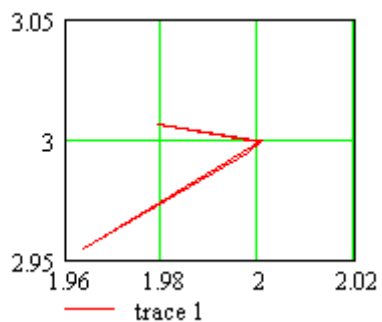


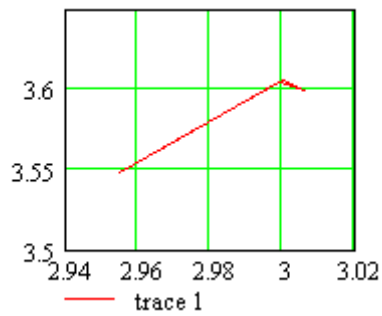
```

Z2 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   V_h ← [(Q7T)^(2)]_h
      | V

```

Вектор M случайных чисел
X,Y.
Вектор M случайных чисел
Y,Z.





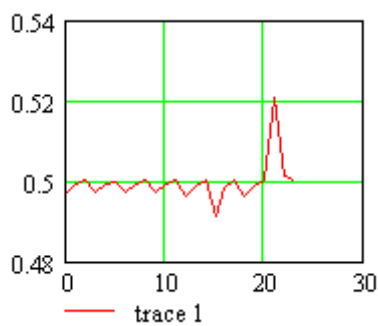
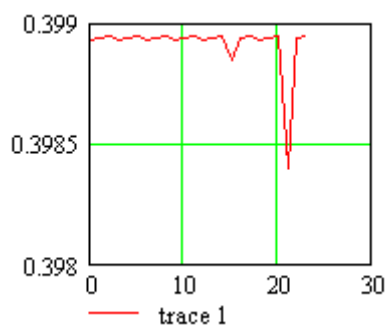
Точка 1

Функция нормального
распределения

X

Плотность вероятности
нормального распределения

X



```
X3 :=
| V ← 0
| for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
|   vh ← [(A7T)(3)]h
| V
Z3 :=
| V ← 0
| for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
|   vh ← [(Q7T)(3)]h
| V
```

Функция нормального
распределения

Y

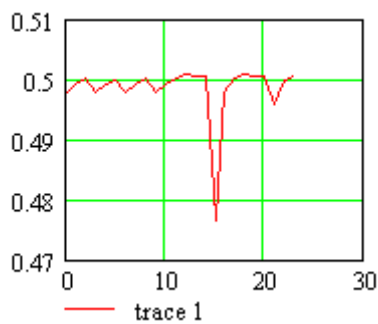
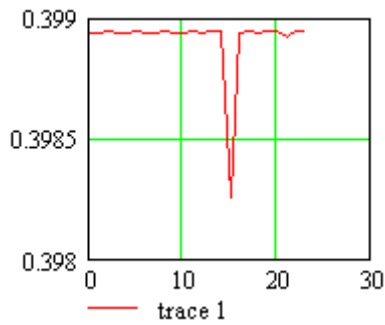
Плотность вероятности
нормального распределения

Y

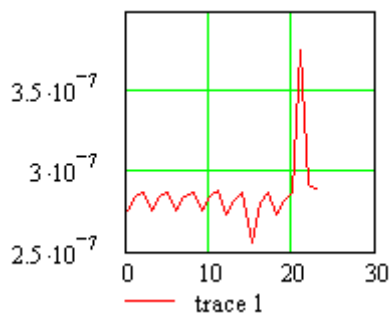
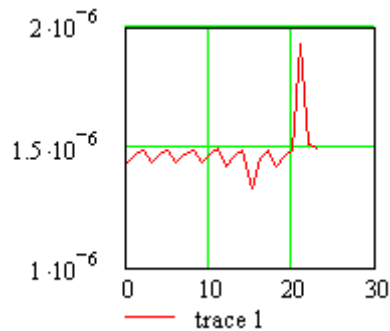

```

Y3 := | v ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   v_h ← [(A27^T)^(3)]_h
      | v

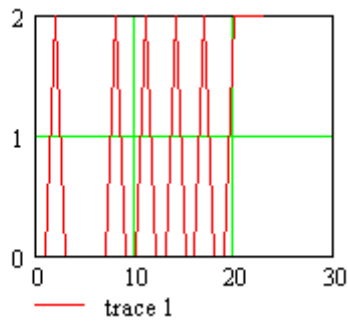
```



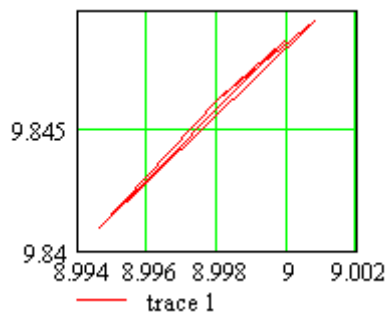
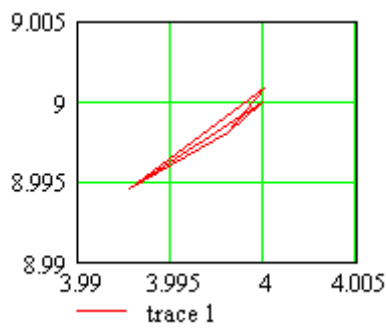
Функция нормального
распределения
Z
Плотность вероятности
нормального распределения
Z



Логистическое распределение
Плотность вероятности
равномерного распределения



Вектор M случайных чисел X,Y.
 Вектор M случайных чисел Y,Z.



```
X4 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh ← [ (A7T)(4) ]h
      | V
Z4 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh ← [ (Q7T)(4) ]h
      | V
```

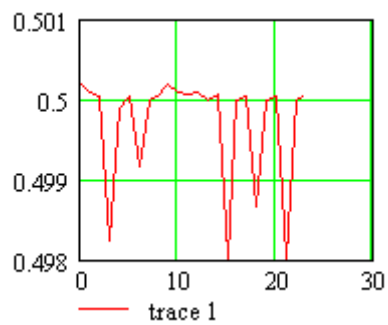
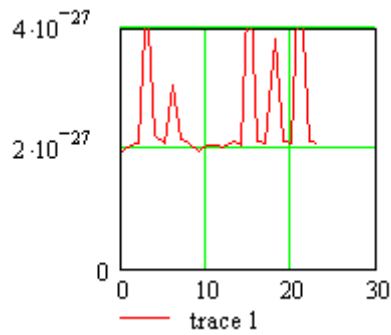
```

Y4 := | v ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   v_h ← [(A27^T)^(4)]_h
      | v

```

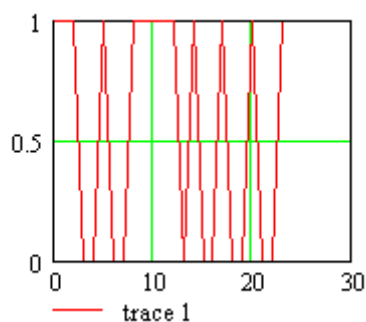
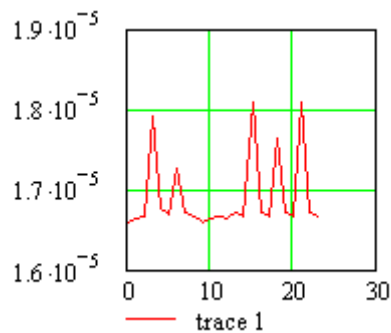
Плотность вероятности
нормального распределения
Функция нормального
распределения

Точка 2

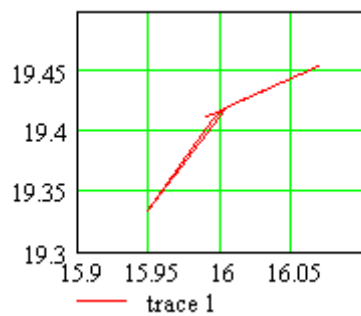
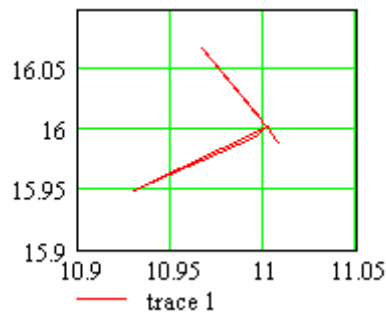


Логистическое распределение
X

Плотность вероятности
равномерного распределения X

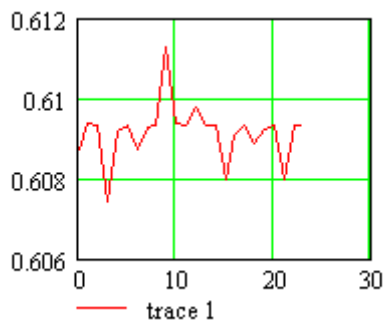
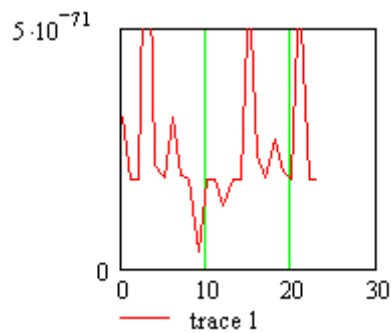


Вектор M случайных чисел
X,Y.
Вектор M случайных чисел
Y,Z.



Точка 3

Плотность вероятности
нормального распределения
Функция нормального
распределения



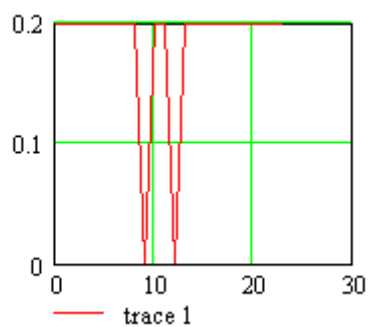
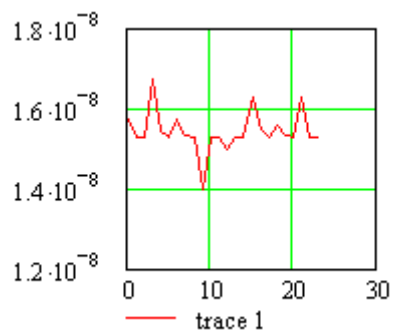
$$X5 := \begin{cases} V \leftarrow 0 \\ \text{for } h \in 0..(\text{rows}(X) - 1) \\ \quad V_h \leftarrow \left[(A7^T)^{(5)} \right]_h \\ V \end{cases}$$

```

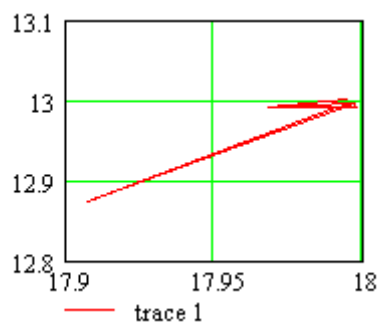
Z5 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   v_h ← [(Q7T)^(S)]_h
      | V
Y5 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   v_h ← [(A27T)^(S)]_h
      | V

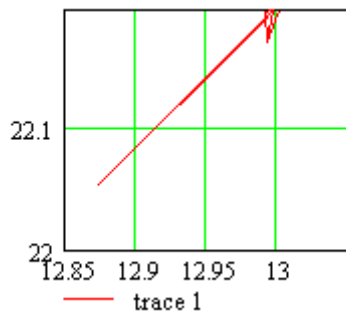
```

Логистическое распределение
Плотность вероятности
равномерного распределения



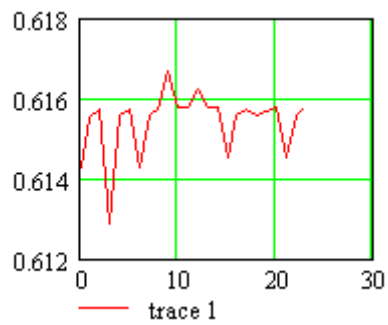
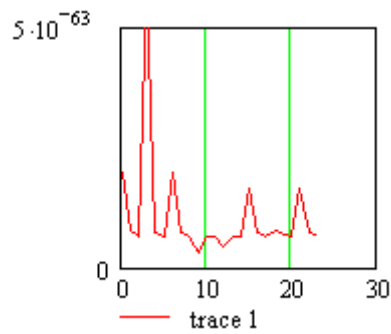
Вектор M случайных чисел
X,Y.
Вектор M случайных чисел
Y,Z.



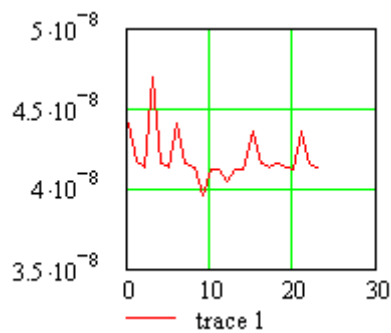


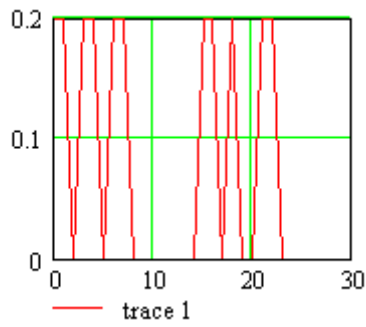
Плотность вероятности
 нормального распределения
 Функция нормального
 распределения

Точка 4



Плотность вероятности
 равномерного распределения
 Логистическое распределение



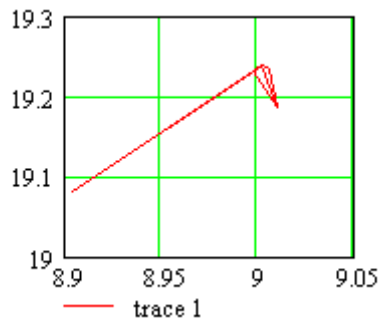
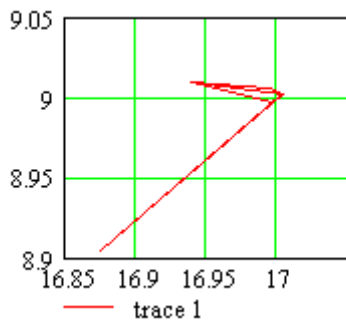


```

X6 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh ← [(A7T)(6)]h
      | V
Z6 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh ← [(Q7T)(6)]h
      | V
Y6 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   Vh ← [(A27T)(6)]h
      | V

```

Вектор M случайных чисел X,Y.
 Вектор M случайных чисел Y,Z.



$$B := (A7^T)^{(0)}$$

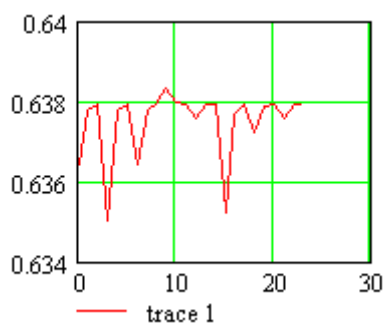
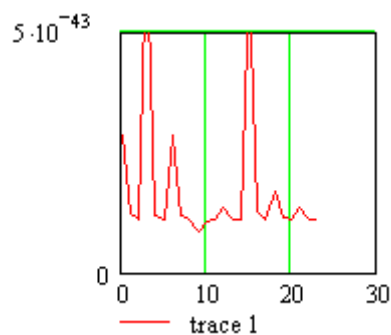
```

X7 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   v_h ← [(A7T)^(7)]_h
      | V
Z7 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   v_h ← [(Q7T)^(7)]_h
      | V

```

Плотность вероятности
 нормального распределения
 Функция нормального
 распределения

Точка 5

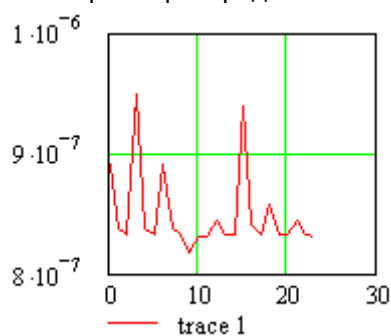


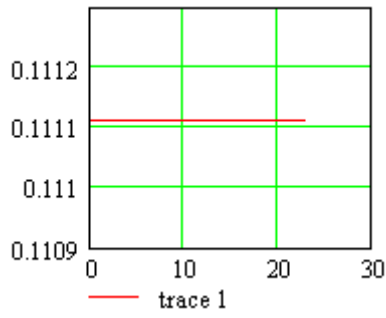
```

Y7 := | V ← 0
      | for h ∈ 0..(rows(X) - 1)
      |   v_h ← [(A27T)^(7)]_h
      | V

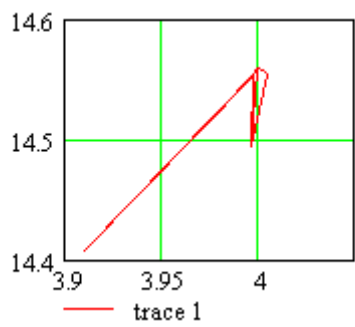
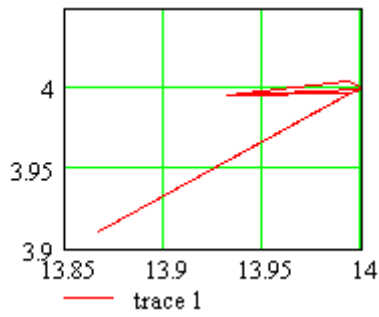
```

Логистическое распределение
 Плотность вероятности
 равномерного распределения



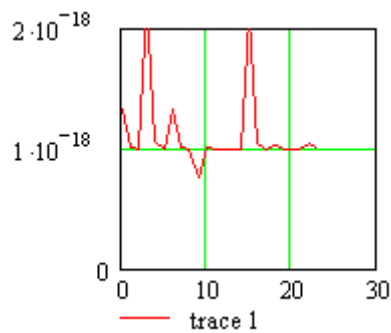


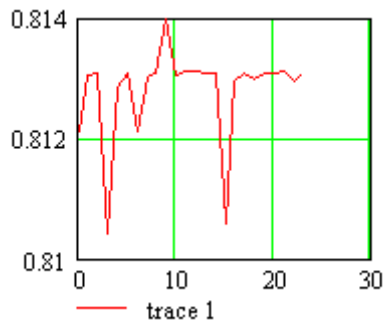
Вектор M случайных чисел
X,Y.
Вектор M случайных чисел
Y,Z.



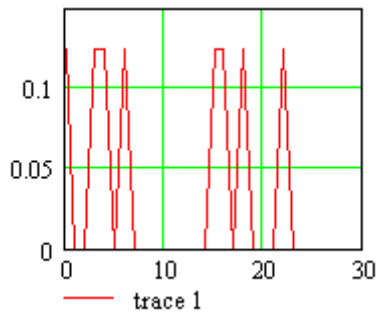
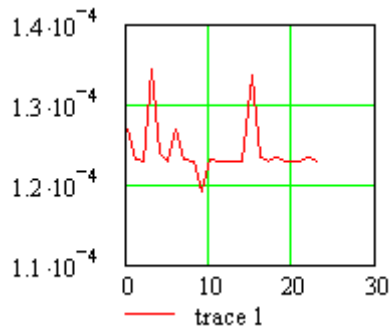
Точка 6

Плотность вероятности
нормального распределения
Функция нормального
распределения

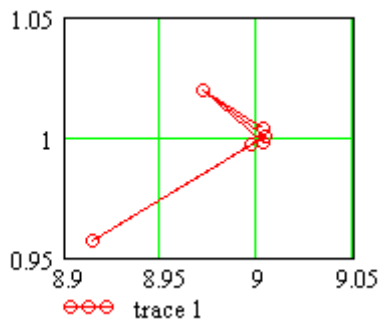


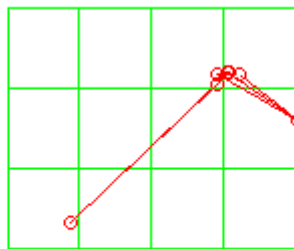


Логистическое распределение
Плотность вероятности
равномерного распределения



Вектор M случайных чисел
X,Y.
Вектор M случайных чисел
Y,Z.

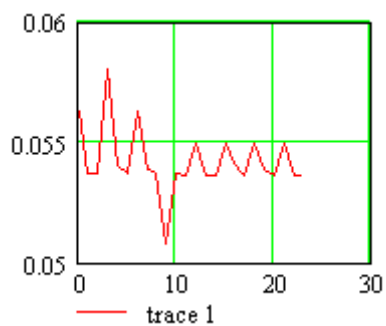




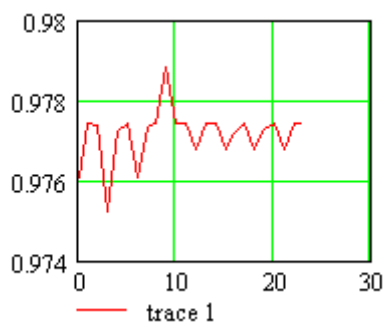
trace 1

Точка 7

Плотность вероятности
нормального распределения
Функция нормального
распределения

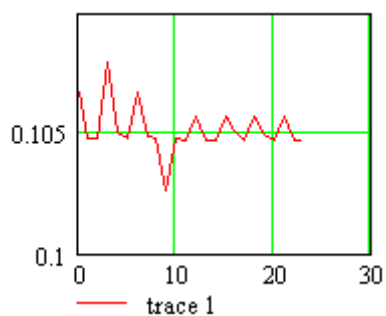


trace 1

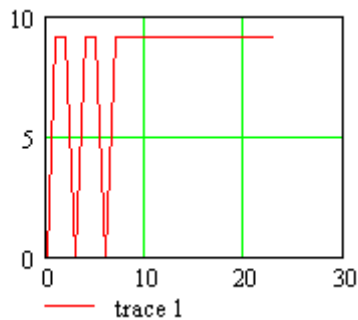


trace 1

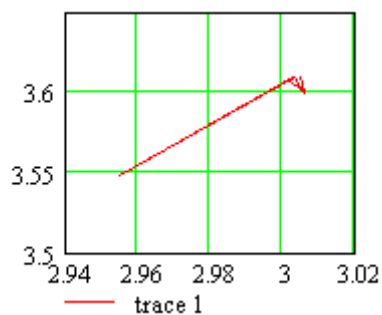
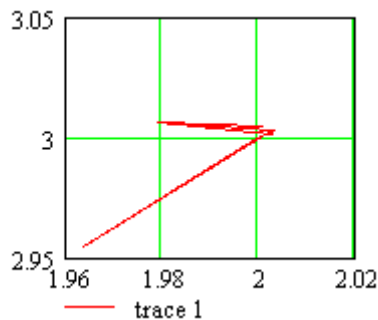
Логистическое распределение
Плотность вероятности
равномерного распределения



trace 1



Вектор M случайных чисел X, Y .
 Вектор M случайных чисел Y, Z .



Расчет закончен !

Выводы

Данная программа позволяет решить следующие задачи

1. На основе картографических данных и методики заложенной в программе определить требования к техническим характеристикам геодезических приборов, необходимых для измерения конкретного полигона (участка) на местности.
2. На основе одного(двух) измерений координат точки (центр координат - опорная точка), определить минимальные предельно возможные значения для исходной точки :
 - дисперсии координат X, Y, Z
 - плотность вероятности нормального распределения
 - функцию нормального распределения
 - и ряд других вероятностных характеристик.
3. На основе одного(двух) измерений координат точки из нескольких опорных точек осуществить корреляцию дисперсий и рассчитать вероятностные характеристики значений координат измеряемой точки.
4. Выбор рациональных координат опорных пунктов(межевых знаков) местной геодезической сети относительно вышестоящей.

3.5 Упорядоченное множество кристаллов

Одной из актуальных задач кристаллографии является представление всех возможных кристаллов (минералов) в виде упорядоченного множества (систематизированной таблицы).

Поставленную задачу можно сформулировать в более развернутом виде следующим образом.

Задача “ Предложить метод создания упорядоченного множества кристаллов, с целью поиска ранее неизвестных естественных и искусственных минералов ”.

В такой постановке задачи предлагаемые критерии и методы на их основе должны обеспечивать не только четкую систематизацию известных минералов и указывать конкретные характеристики неизвестных ранее, но и с высокой вероятностью возможных к существованию, минералов. Сложность поставленной задачи заключается в выборе основных критериев систематизации. Какой из критериев (или какую группу) считать основным в создании систематизированной таблицы кристаллов? Какой принцип положить в основу организации упорядоченного множества кристаллов?

К основным характеристикам кристаллов в настоящее время относят:

- вид кристаллической решетки
- геометрическую форму (число граней и вершин)
- твердость по Моосу
- коэффициент преломления
- удельный вес
- яркостные характеристики (для драгоценных камней).

[Андерсон Б. Определение драгоценных камней .Изд. "Мир ",М.1988 г.]

Предлагаемая автором методика создания упорядоченного множества кристаллов базируется на следующих постулатах

Постулат 1 "Устойчивость и прочность кристаллической решетки обратно пропорциональны числу единичных конструктивных элементов " .

Постулат 2 " Число единичных конструктивных элементов на ребрах и гранях кристаллической решетки находятся в точном соответствии с численными значениями элементов основных пифагоровых треугольников, чем меньше уровень ПТ тем больше устойчивость всей системы".

Постулат 3 "Показатель преломления кристалла находится в соответствии с формулой Брюстера- $\operatorname{tg}\alpha=n$, где α -угол между элементами X и Z основного ПТ(см. Рис.5)".

Постулат 4 “Упорядоченное множество кристаллов находится в точном соответствии с деревом основных пифагоровых треугольников”.

Геометрическое строение кристаллов

Рассмотрим геометрическое строение кристаллов[Г. Эберт. Краткий справочник по физике.,Изд.Физ.-мат.лит.-ры.М.,1963г]. Пространственная кристаллическая решетка может быть представлена с помощью операций симметрии. Простыми операциями являются: вращение, отражение, параллельный сдвиг (трансляция). Сложными операциями являются: вращение с отражением, винтовое движение, скользящее отражение.

Кристаллические системы характеризуются отношением величины a , b , c и углов между ними α , β , γ (Рис1.). **Элементарные ячейки кристаллов различной симметрии с позиций системы m и параметров являются особыми объектами.** С одной стороны- это объекты отражающие закономерности атомных и молекулярных структур, т.е. ФИЗИЧЕСКИЕ объекты. С другой стороны- это геометрические и числовые объекты имеющие строго определенную пространственную решетку с конкретными значениями граней между узлами и вершинами и определенным **единичным конструктивным элементом**(атомом, молекулой, доменом).В физических объектах все единичные конструктивные элементы(ЕКЭ) взаимодействуют между собой с помощью энергетических связей, которые в свою очередь кратны определенной единице взаимодействий.

На Рис.2 представлены пять правильных многогранников. Каждый из них может иметь размеры граней в полном соответствии с размерами элементов основных пифагоровых треугольников дерева ПТ, где в качестве масштабной единицы принимается **единичный конструктивный элемент**. Рассмотрим, например октаэдр (такую структуру имеет алмаз). На Рис.3 и Рис.4 представлены развертки октаэдров, с размерами граней равными значениям элементов ПТ первого и второго уровней дерева ПТ. Таких октаэдров может быть построено всего три.

В соответствии с **Постулатом 2** подобным образом могут быть определены все из представленных на Рис.2 многогранников.

В соответствии с **Постулатом 4** все многогранники могут быть распределены как упорядоченное множество в виде дерева (см.Рис.5).

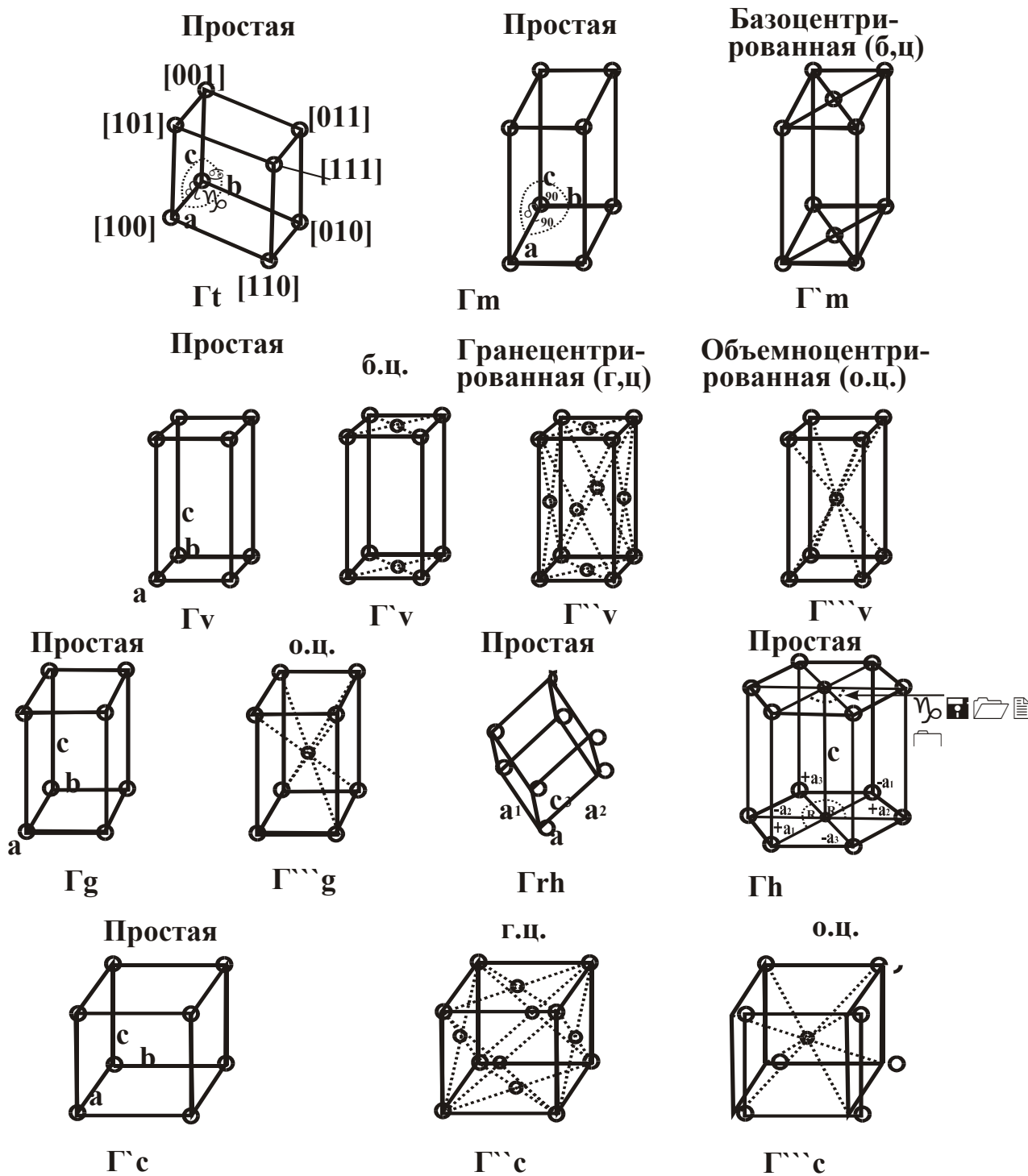
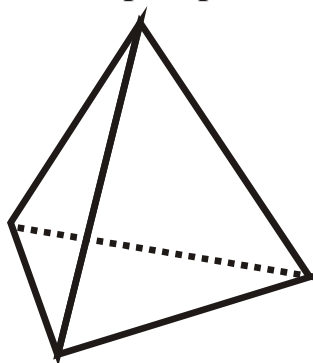
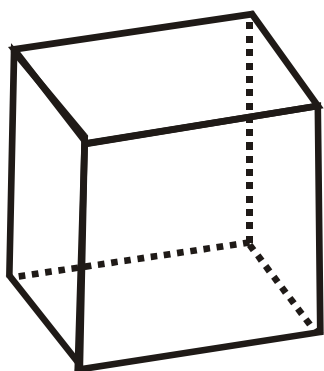


Рис.1 Элементарные ячейки кристаллов различной симметрии

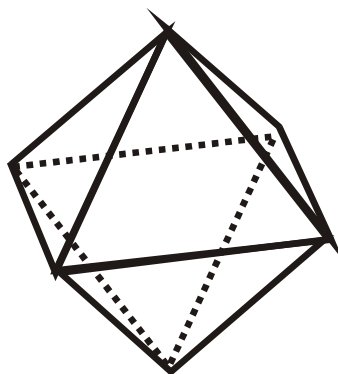
1.Тетраэдр



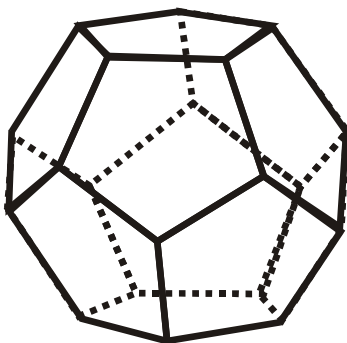
2.Куб



3.Октаэдр



4.Додекаэдр



5.Икосаэдр

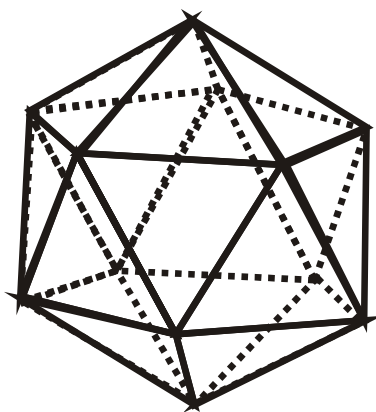


Рис.2 Правильные многогранники

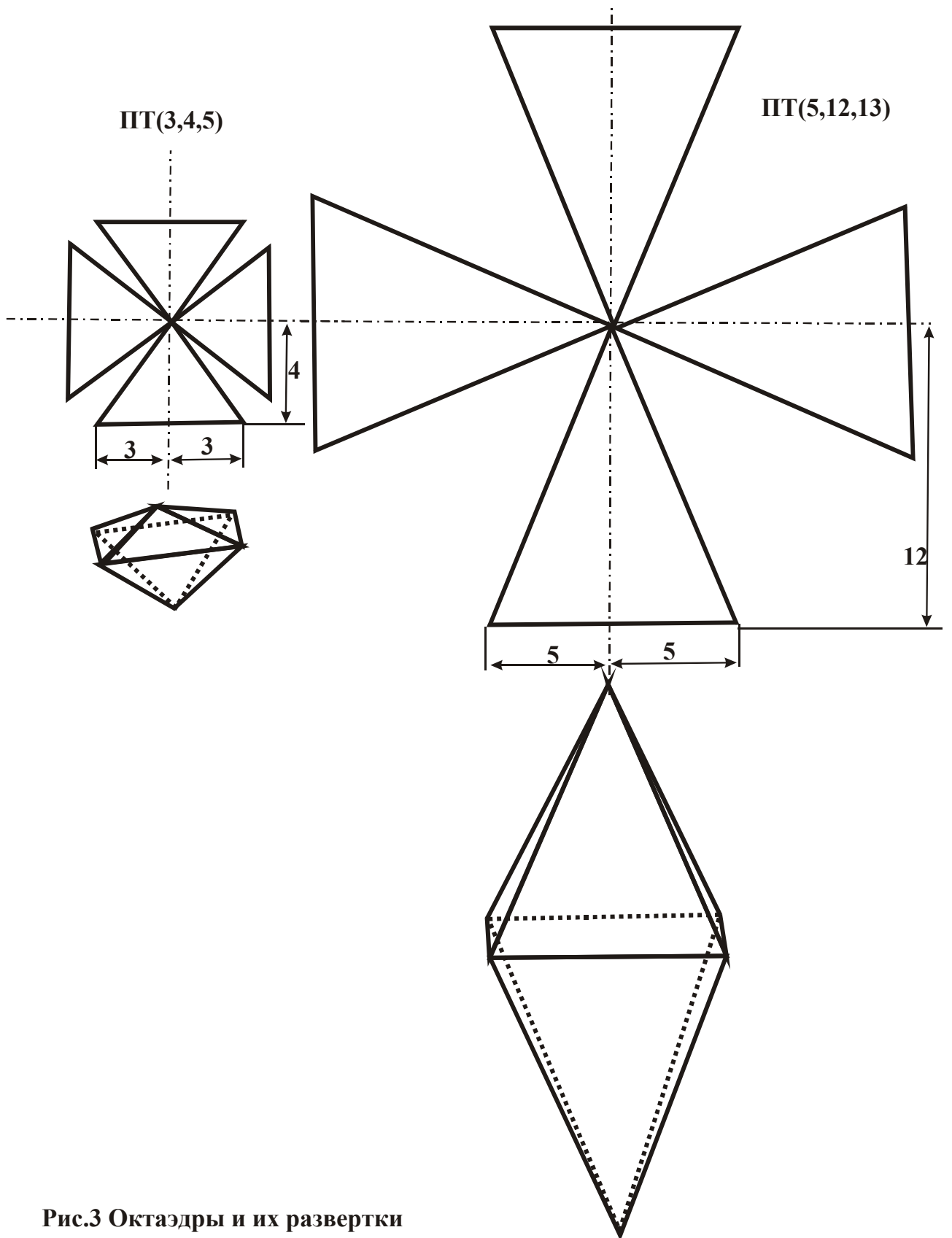


Рис.3 Октаэдры и их развертки

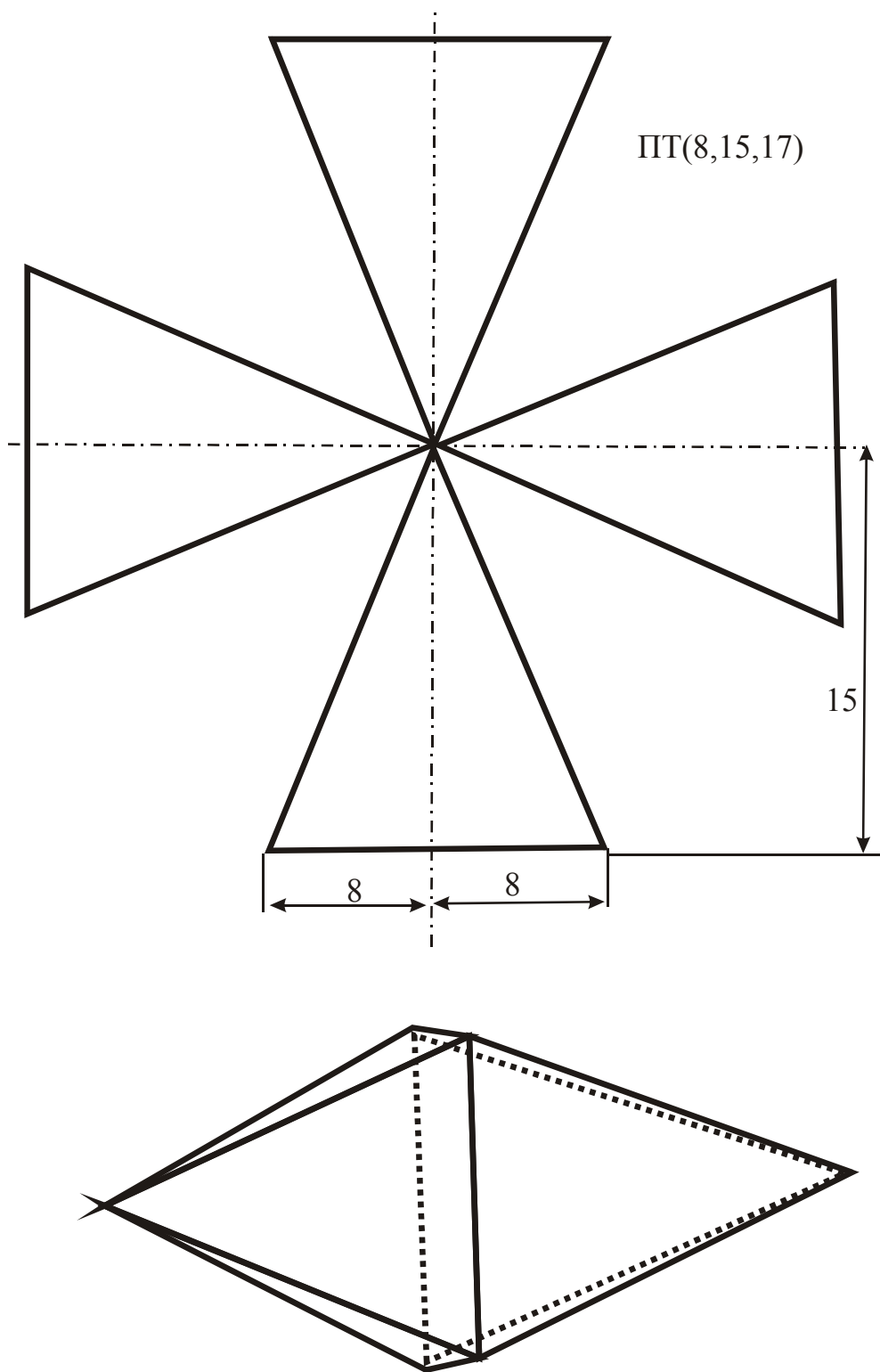


Рис.4 Октаэдр и его развертка

Итерационные формулы системы m n параметров

$$E_1 =: \begin{aligned} x_{11} &= 2z_0 + 2x_0 + y_0 \\ y_{11} &= 2z_0 + x_0 + 2y_0 \\ z_{11} &= 3z_0 + 2x_0 + 2y_0 \end{aligned}$$

$$E_2 =: \begin{aligned} x_{12} &= 2z_0 - 2x_0 + y_0 \\ y_{12} &= 2z_0 - x_0 + 2y_0 \\ z_{12} &= 3z_0 - 2x_0 + 2y_0 \end{aligned}$$

$$E_3 =: \begin{aligned} x_{13} &= 2z_0 + 2x_0 - y_0 \\ y_{13} &= 2z_0 + x_0 - 2y_0 \\ z_{13} &= 3z_0 + 2x_0 - 2y_0 \end{aligned}$$

$$E_4 =: \begin{aligned} x_{14} &= |2z_0 - 2x_0 - y_0| \\ y_{14} &= |2z_0 - x_0 - 2y_0| \\ z_{14} &= 3z_0 - 2x_0 - 2y_0, \end{aligned}$$

где $x_0, y_0, z_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ значения элементов исходного координатного треугольника точки $M(x_0, y_0)$. Из формул $E_1 \div E_4$ с помощью системы m n параметров можно получить

$$E_5 =: \begin{aligned} X_{11} &= 2 + 2\cos \alpha + \sin \alpha \\ Y_{11} &= 2 + \cos \alpha + 2\sin \alpha \\ Z_{11} &= 3 + 2\cos \alpha + 2\sin \alpha \end{aligned}$$

$$E_6 =: \begin{aligned} X_{12} &= 2 - 2\cos \alpha + \sin \alpha \\ Y_{12} &= 2 - \cos \alpha + 2\sin \alpha \\ Z_{12} &= 3 - 2\cos \alpha + 2\sin \alpha \end{aligned}$$

$$E_7 =: \begin{aligned} X_{13} &= 2 + 2\cos \alpha - \sin \alpha \\ Y_{13} &= 2 + \cos \alpha - 2\sin \alpha \\ Z_{13} &= 3 + 2\cos \alpha - 2\sin \alpha \end{aligned}$$

$$E_8 =: \begin{aligned} X_{14} &= |2 - 2\cos \alpha - \sin \alpha| \\ Y_{14} &= |2 - \cos \alpha - 2\sin \alpha| \\ Z_{14} &= 3 - 2\cos \alpha - 2\sin \alpha \end{aligned}$$

где α -угол между элементами X и Z основного ПТ.

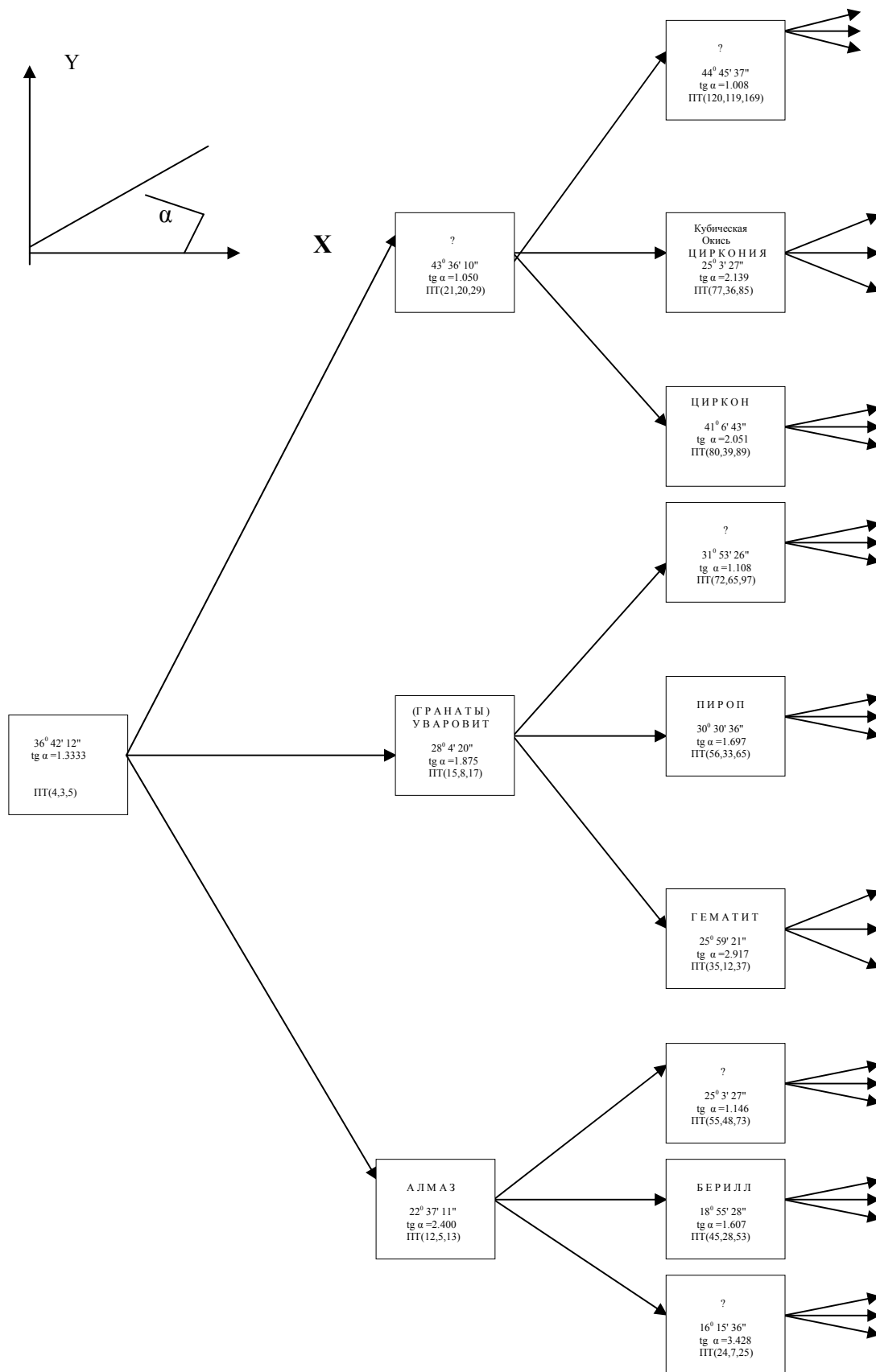


Рис.5 Упорядоченное множество углов (дерево минералов)

На Рис.5 представлено **дерево рациональных углов** декартовой системы координат, где элементом дерева является угол α_i (в отличии от X, Y, Z дерева ПТ). Здесь исходным значением угла является $\alpha_0=36^0 42' 12''$. Это угол между Z и X основного ПТ(4 ,3, 5). Все остальные углы α_i -также определяют лучи местоположений Z_i основных ПТ. При

построении дерева ПТ принималось условие $X_i > Y_i \rightarrow \text{Cos } \alpha_i = \frac{X_i}{Z_i}$.

Если за X_i принять меньшее значение, то $\rightarrow \text{Cos}(\frac{\pi}{2} - \alpha_i) = \frac{Y_i}{Z_i}$.

На каждом из лучей проведенных под углами α (Рис. 5) находятся вершины не только основного ПТ задающего этот луч как продолжение Z_i , но и все множество не основных ПТ ($K \cdot X_i, K \cdot Y_i, K \cdot Z_i$), где K -любое действительное число. Для любого дерева α_0 присущи все свойства дерева ПТ.

Угол Брюстера При идентификации и диагностике камней-минералов обычно рассматривают ряд основных свойств и характеристик образца, например, удельный вес, твердость, коэффициент преломления, двупреломление, дихроизм и т.д. Здесь не ставится задача ревизии и оценки современных методов определения драгоценных камней.

Автором предлагается новый принцип классификации минералов, основанный на использовании системы m, n параметров. Целесообразность и эффективность этого принципа классификации минералов могут определить и оценить только соответствующие специалисты. С позиций математического аспекта, классификация кристаллических решеток с помощью упорядоченных множеств углов в структуре кристалла, предлагаемый метод в виде деревьев следует считать возможным. В дальнейшем изложении для любого минерала принята формула Брюстера $n = \text{tg } \alpha$,

где n -показатель преломления образца. Угол падения, при котором свет, отраженный от полированной поверхности прозрачного вещества, приобретает максимальную степень поляризации, плоскость которой параллельна поверхности, называется **углом Брюстера**.

Этот угол связан с показателем преломления отражающей среды уравнением $n = \text{tg } i$. Можно указать следующие углы падения, вычисленные по формуле Брюстера: для алмаза $67^0 30'$, для кубической окиси циркония 65^0 , для корунда $60^0 30'$, для кварца 57^0

[Андерсон Б. Определение драгоценных камней. Изд. "Мир", М.1988 г.].

Алмаз Имеем $\alpha^* = 67^0 30'$. Здесь $\alpha^* > 45^0$, поэтому примем $\alpha_0 = 90^0 - 67^0 30' = 22^0 30'$.

Обратимся к Рис.5. Из этого рисунка видно, что наиболее близкое значение к α_0 имеет элемент с $\alpha = 22^0 37' 11''$. Это угол α для ПТ(12,5,13). Примем допущение, что для кристаллической решетки алмаза ЕКЭ является ПТ(12,5,13). Тогда кристалл алмаза имеет вид и размеры октаэдра представленного на Рис.3. Это допущение можно проверить путем непосредственных измерений. Таким образом, из Рис.5 следует, что **алмаз находится на втором уровне дерева минералов.**

Кубическая окись циркония Имеем $\alpha^* = 65^0$

→ $\alpha^* > 45^0$, поэтому примем $\alpha_0 = 90^0 - 65^0 = 25^0$.

На основании Постулата 4 обратимся к Рис.5. Из этого рисунка видно, что наиболее близкое значение к α_0 имеет элемент с $\alpha = 25^0 3' 27''$. Это угол α для ПТ(77,36,85). Этот ПТ находится на третьем уровне дерева углов.

Корунд Имеем $\alpha^* = 60^0 30'$

→ $\alpha^* > 45^0$, поэтому примем $\alpha_0 = 90^0 - 60^0 30' = 29^0 30'$.

На основании Постулата 4 обратимся к таблице . Из этого рисунка видно, что наиболее близкое значение к α_0 имеет элемент с $\alpha = 29^0 29' 13''$. Это угол α для ПТ(168,95,193).

Кварц Имеем $\alpha^* = 57^0$

→ $\alpha^* > 45^0$, поэтому примем $\alpha_0 = 90^0 - 57^0 = 33^0$.

На основании Постулата 4 обратимся к таблице . Из этого рисунка видно, что наиболее близкое значение к α_0 имеет элемент с $\alpha = 33^0 46' 45''$. Это угол α для ПТ(132,85,157).

Из справочных данных [2*] следует, что кварцевая группа минералов имеет широкий диапазон коэффициентов преломления в пределах $n = (1.544 \div 1.553)$.

Таблица упорядоченного множества минералов

Обратим внимание на то, что **алмаз** находится на втором уровне дерева (см . Рис .5).

От угла первого уровня дерева имеет место разделение всех существующих минералов на три самостоятельных ветви

Кубической окиси циркония- верхняя ветвь,

Уваровита - средняя ветвь

Алмаза- нижняя ветвь.

Показатель преломления **алмаза** на основании справочных данных равен 2.418 [2*], однако из таблицы 1. видно что в рассматриваемом диапазоне требования постулата 1 могут быть выполнены только для значения $n = 2.4$,

Поэтому введем коэффициент коррекции равный $\eta = \frac{2.418}{2.4} = 1.0075$. При сравнении, справочные данные необходимо корректировать с учетом коэффициента η .

Представляет интерес ближнее соседство строки алмаза в таблице 1.

Отсутствие в ближнем окружении показателя преломления алмаза нескольких ПТ с низкими значениями уровня дерева можно считать косвенным подтверждением справедливости Постулатов 1 и 2.

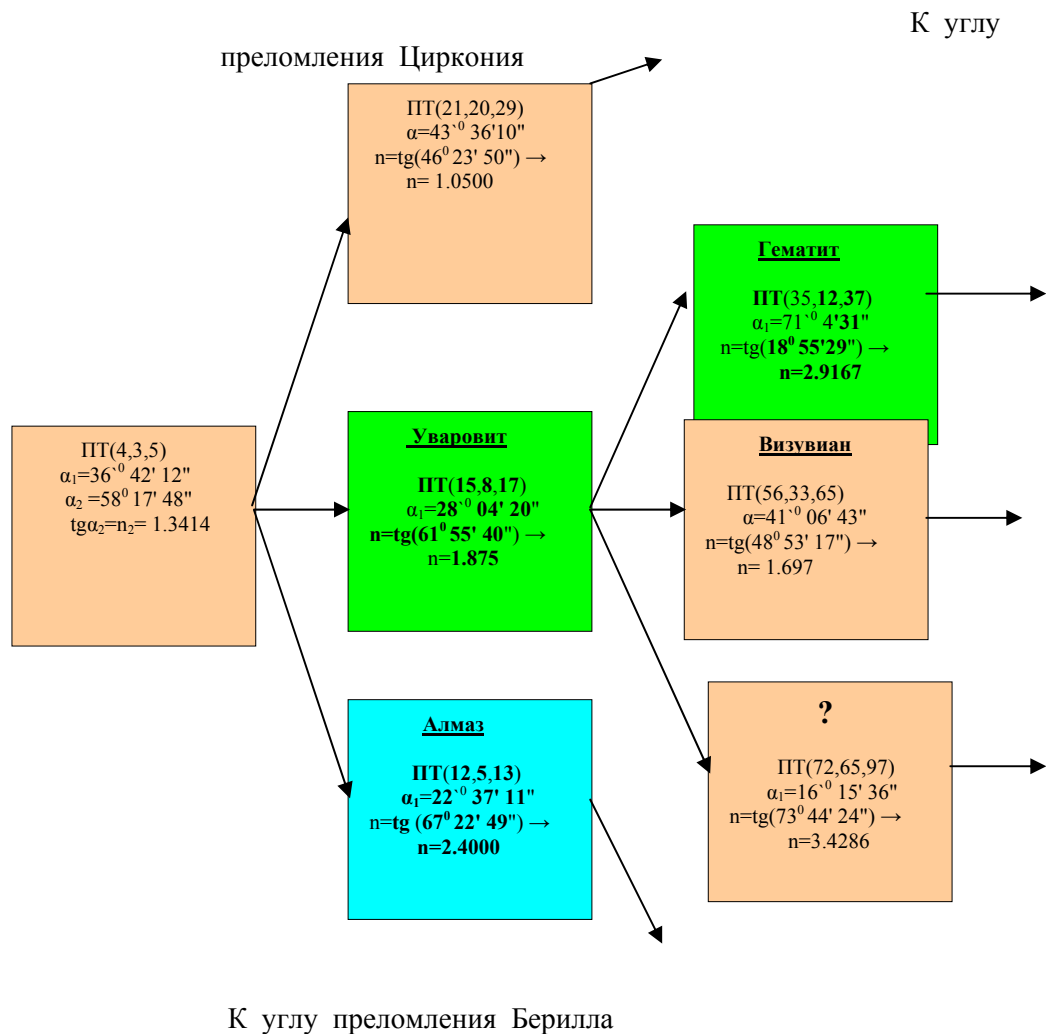


Рис.6 Фрагмент дерева упорядоченного множества минералов

Таблица 1

X	Y	Y	α	$90^{\circ}-\alpha$	$\text{tg}(90^{\circ}-\alpha)$	Уровень	Минерал
651	260	701	21,77105	68,22895	2,503846	7	
5720	2289	6161	21,81004	68,18996	2,498908	9	
6633	2656	7145	21,82226	68,17774	2,497364	9	
1564	627	1685	21,84561	68,15439	2,494418	8	
7455	2992	8033	21,86763	68,13237	2,491644	9	
6816	2737	7345	21,87818	68,12182	2,490318	9	
925	372	997	21,90813	68,09187	2,486559	8	
2160	871	2329	21,9613	68,0387	2,479908	9	
1247	504	1345	22,00708	67,99292	2,474206	9	
12	5	13	22,61986	67,38014	2,4	2	Алмаз
1457	624	1585	23,18435	66,81565	2,334936	9	
2552	1095	2777	23,22297	66,77703	2,330594	9	
1107	476	1205	23,26727	66,73273	2,32563	8	
8216	3537	8945	23,29195	66,70805	2,322872	9	
9009	3880	9809	23,3006	66,6994	2,321907	9	
1900	819	2069	23,31859	66,68141	2,319902	8	
5347	2305	616	23,32005	66,67995	2,31974	9	
8862	3821	1020	23,3241	66,6759	2,319288	9	
25746	11105	2958	23,33194	66,66806	2,318415	9	

Особый интерес для специалистов должен представлять тот факт, что в ближней зоне показателя преломления минерала имеют место углы (показатели преломления), расположенные на значительно удаленных уровнях дерева упорядоченного множества в отличие от исходного уровня рассматриваемого минерала. Из данных таблицы 1 следует, что для угла ПТ(12, 5, 13) имеют место симметричные углы восьмого уровня, т.е. ПТ(925, 372, 997) и ПТ(1107, 476, 1205), ПТ(1564, 627, 1685) и ПТ(1900, 819, 2069). Угол задаваемый ПТ(651 260 701) находится на седьмом уровне дерева и не имеет симметричного угла в нижней части рассматриваемого диапазона углов. Из этого факта можно сделать вывод -**существует минерал с показателем преломления $n=2.503846 \cdot 1.0075=2.5226$** .

Для Везувиана (см. табл. 2) имеют место симметрия ПТ(2135, 1248, 2473)- ПТ(2405, 1428, 2797) и асимметрия -ПТ(6487, 3844, 7538).

Таблица 2.

X	Y	Z	α	$90^0-\alpha$	$\text{tg}(90^0-\alpha)$	Уровень	Минерал
2135	1248	2473	30,30814	59,69186	1,710737	7	
19092	11165	22117	30,31909	59,68091	1,709987	9	
22261	13020	25789	30,32249	59,67751	1,709754	9	
5304	3103	6145	30,32892	59,67108	1,709314	8	
25531	14940	29581	30,33493	59,66507	1,708902	9	
23452	13725	27173	30,33779	59,66221	1,708707	9	
3225	1888	3737	30,34583	59,65417	1,708157	8	
7708	4515	8933	30,35985	59,64015	1,707198	9	
4539	2660	5261	30,37167	59,62833	1,706391	9	
56	33	65	30,51024	59,48976	1,69697	3	Везувиан
4929	2920	5729	30,64302	59,35698	1,688014	9	
6487	3844	7538	30,6497	59,3503	1,687565	7	
8428	4995	9797	30,65384	59,34616	1,687287	9	
3555	2108	4133	30,66657	59,33343	1,686433	8	
25972	15405	30197	30,67382	59,32618	1,685946	9	
28321	16800	32929	30,67639	59,32361	1,685774	9	
5904	3503	6865	30,68178	59,31822	1,685413	8	
24871	14760	28921	30,68753	59,31247	1,685027	9	
21372	12685	24853	30,69055	59,30945	1,684825	9	
2405	1428	2797	30,70027	59,29973	1,684174	7	

Из данных таблицы 2. видно, что в рассматриваемой области только строка **Везувиана** находится на самом низком уровне дерева ПТ.

В таблице 3. представлены минералы показатели преломления, которых находятся на уровнях 1-5 дерева упорядоченного множества углов.

В таблице 4. представлены данные дерева при сортировке по убыванию α для уровней 1-8. Здесь с целью сокращения фрагмента не включены позиции девятого уровня и исключены позиции $\text{tg } \alpha > 2.01$ для уровней 5—8. Полная таблица 1—9 уровней имеет 10000 позиций, т. е. одна позиция от соседней отличается по углу α на **16"**.

Включение в таблицу позиций десятого уровня дерева приведет к разности между соседними позициями в **0.1"**.

Таблица 3.

X	Y	Z	α	$\operatorname{tg}\alpha$	Код	Минерал	Справоч	Тв. Моос
4	3	5	53,1301	1,3333	1	?		
12	5	13	67,3801	2,4000	2	Алмаз	2.418	10
15	8	17	61,9275	1,8750	2	Уваровит	1.87	7.5
21	20	29	46,3972	1,0500	2	?		
24	7	25	73,7398	3,4286	3	?		
35	12	37	71,0754	2,9167	3	Гамбергит	3.0	7.5
77	36	85	64,9424	2,1389	3	Ок Циркон	2.17	8.5
80	39	89	64,0108	2,0513	3	Циркон н	1.95+0.06	7.5
56	33	65	59,4898	1,6970	3		1.73-1.76	7.5
45	28	53	58,1092	1,6071	3	Берилл	1.62	7.5
55	48	73	48,8879	1,1458	3	?		
72	65	97	47,9250	1,1077	3	?		
40	9	41	77,3196	4,4444	4	?		
63	16	65	75,7500	3,9375	4	?		
165	52	173	72,5077	3,1731	4	?		
176	57	185	72,0547	3,0877	4	?		
140	51	149	69,9840	2,7451	4	Карборунд	2.67+0.04	9.5
117	44	125	69,3903	2,6591	4	?		
187	84	205	65,8105	2,2262	4	?		
252	115	277	65,4705	2,1913	4	?		
456	217	505	64,5513	2,1014	4	?		
459	220	509	64,3915	2,0864	4	?		
273	136	305	63,5190	2,0074	4			
208	105	233	63,2150	1,9810	4	Касситерит	2.05+0.10	6.5
168	95	193	60,5129	1,7684	4	Сапфир	1.76+0.01	9.0
209	120	241	60,1372	1,7417	4	Пироп	1.73-1.76	7.25
299	180	349	58,9518	1,6611	4	Сподумен	1.67+0.01	7.0
288	175	337	58,7155	1,6457	4	Топаз	1.63+0.01	8.0
132	85	157	57,2209	1,5529	4	Кварц	1.55+0.01	7.0
91	60	109	56,6015	1,5167	4	Сердолик	1.53+0.01	7.0
1428	715	1597	63,4029	1,9972	5	?		
1363	684	1525	63,3509	1,9927	5	?		
396	203	445	62,8591	1,9507	5	Шеелит	1.93+0.02	5.0
340	189	389	60,9311	1,7989	5	Альмандин	1.76-1.81	7.5
493	276	565	60,7583	1,7862	5	Спессартин	1.80	7.0
1075	612	1237	60,3470	1,7565	5	Бенитоит	1.78+0.05	6.5
1116	637	1285	60,2828	1,7520	5	Х берилл	1.75+0.01	8.0
780	451	901	59,9633	1,7295	5	Александр	1.75+0.01	8.5
627	364	725	59,8630	1,7225	5	Гроссуляр	1.734	7.0
777	464	905	59,1557	1,6746	5	Сингалит	1.69+0.04	6.5
1020	611	1189	59,0776	1,6694	5	Хризолит	1.67+0.04	6.5
1716	1037	2005	58,8549	1,6548	5	Жадеит	1.65	7.0
1705	1032	1993	58,8144	1,6521	5	Андалузит	1.64+0.01	7.5
943	576	1105	58,5827	1,6372	5	Турмалин	1.63+0.02	7.0
700	429	821	58,4977	1,6317	5	Топаз	1.63+0.01	8.0
440	279	521	57,6216	1,5771	5	Аквамарин,	1.57+0.01	7.5
527	336	625	57,4796	1,5685	5	Псевдофит	1.57	2.5
665	432	793	56,9913	1,5394	5	Халцедон	1.53+0.01	7.0
624	407	745	56,8859	1,5332	5	Амазонит	1.53+0.01	7.0

240	161	289	56,1450	1,4907	5	Молдавит	1.49	5.0
-----	-----	-----	---------	--------	---	----------	------	-----

Таблица 4

X	Y	Z	α	$\operatorname{tg}\alpha$	Код	Минерал	Справоч	Тв. Мос
40	9	41	77,3196	4,4444	4	?		
63	16	65	75,7500	3,9375	4	?		
24	7	25	73,7398	3,4286	3	?		
165	52	173	72,5077	3,1731	4	?		
176	57	185	72,0547	3,0877	4	?		
35	12	37	71,0754	2,9167	3	Гамбергит	3.0	7.5
140	51	149	69,9840	2,7451	4	Карборунд	2.67+0.04	9.5
117	44	125	69,3903	2,6591	4	?		
12	5	13	67,3801	2,4000	2	Алмаз	2.418	10
187	84	205	65,8105	2,2262	4	?		
252	115	277	65,4705	2,1913	4	?		
77	36	85	64,9424	2,1389	3	Ок Циркон	2.17	8.5
456	217	505	64,5513	2,1014	4	?		
459	220	509	64,3915	2,0864	4	?		
80	39	89	64,0108	2,0513	3	Циркон н	1.95+0.06	7.5
1044	517	1165	63,6549	2,0193	5	?		
273	136	305	63,5190	2,0074	4			
3740	1869	4181	63,4472	2,0011	6	?		
25632	12815	28657	63,4367	2,0002	7			
87841	43920	98209	63,4352	2,0000	8			
67104	33553	75025	63,4343	1,9999	8			
4895	2448	5473	63,4303	1,9996	6	Сфен	1.95+0.12	5.0
55544	27783	62105	63,4259	1,9992	8			
69345	34688	77537	63,4247	1,9991	8			
18696	9353	20905	63,4227	1,9989	7			
100347	50204	112205	63,4210	1,9988	8			
96880	48471	108329	63,4203	1,9987	8			
15229	7620	17029	63,4184	1,9986	7			
45076	22557	50405	63,4156	1,9983	8			
31275	15652	34973	63,4137	1,9981	8			
1428	715	1597	63,4029	1,9972	5	?		
38905	19488	43513	63,3931	1,9964	8			
58156	29133	65045	63,3916	1,9962	8			
20679	10360	23129	63,3895	1,9960	7			
136120	68199	152249	63,3882	1,9959	8			
142857	71576	159785	63,3876	1,9959	8			
27416	13737	30665	63,3865	1,9958	7			
105315	52772	117797	63,3851	1,9957	8			
86064	43127	96265	63,3844	1,9956	8			
8165	4092	9133	63,3816	1,9954	6	?		
119424	59857	133585	63,3793	1,9952	8			
158691	79540	177509	63,3788	1,9951	8			
47432	23775	53057	63,3780	1,9950	7			
276297	138496	309065	63,3773	1,9950	8			

276232	138465	308993	63,3771	1,9950	8			
47367	23744	52985	63,3764	1,9949	7			
158236	79323	177005	63,3756	1,9948	8			
118969	59640	133081	63,3751	1,9948	8			
8100	4061	9061	63,3727	1,9946	6	?		
84959	42600	95041	63,3700	1,9943	8			
103820	52059	116141	63,3692	1,9943	8			
26961	13520	30161	63,3678	1,9942	7			
140192	70305	156833	63,3667	1,9941	8			
133455	66928	149297	63,3661	1,9940	8			
20224	10143	22625	63,3647	1,9939	7			
56661	28420	63389	63,3626	1,9937	8			
37800	18961	42289	63,3610	1,9936	8			
1363	684	1525	63,3509	1,9927	5	?		
29260	14691	32741	63,3395	1,9917	8			
42021	21100	47021	63,3374	1,9915	8			
14124	7093	15805	63,3344	1,9913	7			
89535	44968	100193	63,3324	1,9911	8			
92612	46515	103637	63,3316	1,9910	8			
63560	31929	71129	63,3276	1,9907	8			
50799	25520	56849	63,3263	1,9906	8			
4440	2231	4969	63,3215	1,9901	6	?		
60409	30360	67609	63,3171	1,9898	8			
78936	39673	88345	63,3160	1,9897	8			
22967	11544	25705	63,3143	1,9895	7			
131052	65875	146677	63,3130	1,9894	8			
129897	65296	145385	63,3125	1,9894	8			
21812	10965	24413	63,3111	1,9892	7			
70851	35620	79301	63,3093	1,9891	8			
52324	26307	58565	63,3081	1,9890	8			
3285	1652	3677	63,3025	1,9885	6	?		
31164	15677	34885	63,2954	1,9879	8			
36995	18612	41413	63,2933	1,9877	8			
9116	4587	10205	63,2893	1,9874	7			
45257	22776	50665	63,2858	1,9870	8			
42180	21229	47221	63,2841	1,9869	8			
6039	3040	6761	63,2796	1,9865	7			
15456	7783	17305	63,2721	1,9859	8			
9625	4848	10777	63,2661	1,9854	8			
208	105	233	63,2150	1,9810	4	Касситерит	2.05+0.10	6. 5
7303	3696	8185	63,1563	1,9759	8			
11328	5735	12697	63,1484	1,9752	8			
23549	11926	26396	63,1408	1,9746	8			
4233	2144	4745	63,1379	1,9743	7			
28764	14573	32245	63,1314	1,9738	8			
30551	15480	34249	63,1290	1,9736	8			
6020	3051	6749	63,1236	1,9731	7			
23837	12084	26725	63,1176	1,9726	8			
19812	10045	22213	63,1143	1,9723	8			
1995	1012	2237	63,1028	1,9713	6	?		
30652	15555	34373	63,0935	1,9706	8			
41181	20900	46181	63,0915	1,9704	8			

12524	6357	14045	63,0883	1,9701	7			
73911	37520	82889	63,0859	1,9699	8			
74292	37715	83317	63,0850	1,9698	8			
12905	6552	14473	63,0826	1,9696	7			
43848	22265	49177	63,0796	1,9694	8			
33319	16920	37369	63,0777	1,9692	8			
2376	1207	2665	63,0696	1,9685	6	?		
26289	13360	29489	63,0604	1,9677	8			
32600	16569	36569	63,0580	1,9675	8			
8687	4416	9745	63,0537	1,9672	7			
46172	23475	51797	63,0501	1,9669	8			
44385	22568	49793	63,0485	1,9667	8			
6900	3509	7741	63,0444	1,9664	7			
20091	10220	22541	63,0382	1,9659	8			
13780	7011	15461	63,0339	1,9655	8			
589	300	661	63,0085	1,9633	5	?		
15096	7697	16945	62,9843	1,9613	8			
22347	11396	25085	62,9804	1,9610	8			
7840	3999	8801	62,9749	1,9605	7			
51153	26096	57425	62,9713	1,9602	8			
53504	27297	60065	62,9700	1,9601	8			
10191	5200	11441	62,9669	1,9598	7			
38804	19803	43565	62,9632	1,9595	8			
31553	16104	35425	62,9612	1,9593	8			
2940	1501	3301	62,9537	1,9587	6	?		
42343	21624	47545	62,9472	1,9581	8			
56068	28635	62957	62,9457	1,9580	8			
16665	8512	18713	62,9434	1,9578	7			
96664	49377	108545	62,9416	1,9577	8			
96471	49280	108329	62,9408	1,9576	8			
16472	8415	18497	62,9390	1,9575	7			
54717	27956	61445	62,9366	1,9573	8			
40992	20945	46033	62,9351	1,9571	8			
2747	1404	3085	62,9283	1,9566	6	?		
28272	14455	31753	62,9201	1,9559	8			
8840	4521	9929	62,9136	1,9553	7			
45591	23320	51209	62,9101	1,9550	8			
43240	22119	48569	62,9084	1,9549	8			
6489	3320	7289	62,9041	1,9545	7			
17908	9165	20117	62,8974	1,9540	8			
11815	6048	13273	62,8925	1,9535	8			
396	203	445	62,8591	1,9507	5	Шеелит	1.93+0.02	5.0
7797	4004	8765	62,8181	1,9473	8			
11020	5661	12389	62,8103	1,9467	8			
3619	1860	4069	62,7989	1,9457	7			
22576	11607	25385	62,7909	1,9450	8			
23205	11932	26093	62,7878	1,9448	8			
4248	2185	4777	62,7805	1,9442	7			
15423	7936	17345	62,7716	1,9434	8			
12200	6279	13721	62,7664	1,9430	8			
1025	528	1153	62,7460	1,9413	6	?		
13440	6929	15121	62,7266	1,9397	8			

17407	8976	19585	62,7219	1,9393	8			
4992	2575	5617	62,7142	1,9386	7			
28165	14532	31693	62,7081	1,9381	8			
27784	14337	31265	62,7055	1,9379	8			
4611	2380	5189	62,6992	1,9374	7			
14740	7611	16589	62,6904	1,9367	8			
10773	5564	12125	62,6847	1,9362	8			
644	333	725	62,6574	1,9339	6	Циркон м	1.79	6.5
5723	2964	6445	62,6199	1,9308	8			
6660	3451	7501	62,6082	1,9299	8			
1581	820	1781	62,5861	1,9280	7			
7584	3937	8545	62,5653	1,9263	8			
6955	3612	7837	62,5554	1,9255	8			
952	495	1073	62,5275	1,9232	7			
2257	1176	2545	62,4784	1,9192	8			
1320	689	1489	62,4368	1,9158	8			
15	8	17	61,9275	1,8750	2	Уваровит	1.87	7.5
1216	663	1385	61,3994	1,8341	8			
2065	1128	2353	61,3546	1,8307	8			
864	473	985	61,3013	1,8266	7			
6283	3444	7165	61,2708	1,8243	8			
6840	3751	7801	61,2600	1,8235	8			
1421	780	1621	61,2372	1,8218	7			
5964	3277	6805	61,2128	1,8200	8			
5115	2812	5837	61,2000	1,8190	8			
572	315	653	61,1585	1,8159	6	?		
9525	5252	10877	61,1281	1,8136	8			
13020	7181	14869	61,1217	1,8131	8			
4067	2244	4645	61,1119	1,8124	7			
24480	13511	27961	61,1048	1,8119	8			
24805	13692	28333	61,1019	1,8116	8			
4392	2425	5017	61,0951	1,8111	7			
15295	8448	17473	61,0865	1,8105	8			
11800	6519	13481	61,0812	1,8101	8			
897	496	1025	61,0594	1,8085	6	ИАГранат		
10640	5889	12161	61,0365	1,8068	8			
13439	7440	15361	61,0305	1,8063	8			
3696	2047	4225	61,0205	1,8056	7			
20165	11172	23053	61,0123	1,8050	8			
19608	10865	22417	61,0087	1,8047	8			
3139	1740	3589	60,9997	1,8040	7			
9540	5291	10909	60,9867	1,8031	8			
6741	3740	7709	60,9779	1,8024	8			
340	189	389	60,9311	1,7989	5	Альмандин	1.76-1.81	7.5
10087	5616	11545	60,8929	1,7961	8			
15276	8507	17485	60,8872	1,7957	8			
5529	3080	6329	60,8794	1,7951	7			
36816	20513	42145	60,8745	1,7948	8			
38807	21624	44425	60,8726	1,7946	8			
7520	4191	8609	60,8685	1,7943	7			
24024	13393	27505	60,8610	1,7938	8			
2331	1300	2669	60,8516	1,7931	6	?		

34744	19383	39785	60,8437	1,7925	8			
46365	25868	53093	60,8419	1,7924	8			
13952	7785	15977	60,8392	1,7922	7			
81687	45584	93545	60,8371	1,7920	8			
81840	45671	93721	60,8362	1,7919	8			
14105	7872	16153	60,8341	1,7918	7			
47436	26477	54325	60,8314	1,7916	8			
35815	19992	41017	60,8297	1,7915	8			
2484	1387	2845	60,8222	1,7909	6	Пейнит	1.8+0.029	8.0
26625	14872	30497	60,8135	1,7903	8			
32732	18285	37493	60,8111	1,7901	8			
8591	4800	9841	60,8068	1,7898	7			
45080	25191	51641	60,8033	1,7895	8			
43089	24080	49361	60,8016	1,7894	8			
6600	3689	7561	60,7975	1,7891	7			
18795	10508	21533	60,7911	1,7886	8			
12688	7095	14537	60,7865	1,7883	8			
493	276	565	60,7583	1,7862	5	Спессаргин	1.80	7.0
11484	6437	13165	60,7285	1,7841	8			
16731	9380	19181	60,7234	1,7837	8			
5740	3219	6581	60,7162	1,7832	7			
36897	20696	42305	60,7114	1,7828	8			
38372	21525	43997	60,7095	1,7827	8			
7215	4048	8273	60,7052	1,7824	7			
27056	15183	31025	60,7002	1,7820	8			
21809	12240	25009	60,6973	1,7818	8			
1968	1105	2257	60,6865	1,7810	6			
27559	15480	31609	60,6769	1,7803	8			
36256	20367	41585	60,6747	1,7801	8			
10665	5992	12233	60,6711	1,7799	7			
61372	34485	70397	60,6683	1,7797	8			
61047	34304	70025	60,6672	1,7796	8			
10340	5811	11861	60,6644	1,7794	7			
33981	19100	38981	60,6606	1,7791	8			
25284	14213	29005	60,6582	1,7789	8			
1643	924	1885	60,6472	1,7781	6	Плеонаст	1.78	8.0
16284	9163	18685	60,6336	1,7771	8			
19581	11020	22469	60,6296	1,7769	8			
4940	2781	5669	60,6224	1,7763	7			
25047	14104	28745	60,6161	1,7759	8			
23572	13275	27053	60,6132	1,7757	8			
3465	1952	3977	60,6054	1,7751	7			
9256	5217	10625	60,5929	1,7742	8			
19245	10850	22092	60,5864	1,7737	8			
5959	3360	6841	60,5834	1,7735	8			
168	95	193	60,5129	1,7684	4	Сапфир	1.76+0.01	9.0
7705	4368	8857	60,4509	1,7640	8			
12360	7009	14209	60,4437	1,7634	8			
4823	2736	5545	60,4345	1,7628	7			
33660	19099	38701	60,4290	1,7624	8			
36105	20488	41513	60,4270	1,7623	8			
7268	4125	8357	60,4226	1,7619	7			

29475	16732	33893	60,4178	1,7616	8			
24820	14091	28541	60,4152	1,7614	8			
2613	1484	3005	60,4065	1,7608	6	Пирит		6.0
41580	23621	47821	60,3997	1,7603	8			
56291	31980	64741	60,3983	1,7602	8			
17324	9843	19925	60,3960	1,7600	7			
103145	58608	118633	60,3943	1,7599	8			
104052	59125	119677	60,3937	1,7599	8			
18231	10360	20969	60,3920	1,7597	7			
62640	35599	72049	60,3900	1,7596	8			
47929	27240	55129	60,3887	1,7595	8			
3520	2001	4049	60,3832	1,7591	6	Альмандин		7.5
40239	22880	46289	60,3773	1,7587	8			
50336	28623	57905	60,3758	1,7586	8			
73292	41685	84317	60,3708	1,7582	8			
70847	40296	81505	60,3699	1,7582	8			
11172	6355	12853	60,3674	1,7580	7			
33221	18900	38221	60,3637	1,7577	8			
23124	13157	26605	60,3612	1,7575	8			
1075	612	1237	60,3470	1,7565	5	Бенитоит	1.78+0.05	6.5
29760	16951	34249	60,3346	1,7556	8			
44597	25404	51325	60,3327	1,7555	8			
15912	9065	18313	60,3300	1,7553	7			
104975	59808	120817	60,3283	1,7552	8			
110264	62823	126905	60,3276	1,7552	8			
21201	12080	24401	60,3262	1,7550	7			
81620	46509	93941	60,3245	1,7549	8			
66783	38056	76865	60,3235	1,7549	8			
6364	3627	7325	60,3201	1,7546	6	Корунд		9.0
93433	53256	107545	60,3172	1,7544	8			
124260	70829	143029	60,3166	1,7544	8			
37191	21200	42809	60,3155	1,7543	7			
216864	123623	249625	60,3148	1,7542	8			
216905	123648	249673	60,3144	1,7542	8			
37232	21225	42857	60,3137	1,7542	7			
124547	71004	143365	60,3126	1,7541	8			
93720	53431	107881	60,3120	1,7540	8			
6405	3652	7373	60,3091	1,7538	6			
67480	38481	77681	60,3057	1,7536	8			
82563	47084	95045	60,3048	1,7535	8			
21488	12255	24737	60,3031	1,7534	7			
111945	63848	128873	60,3017	1,7533	8			
106656	60833	122785	60,3010	1,7533	8			
16199	9240	18649	60,2993	1,7531	7			
45540	25979	52429	60,2967	1,7530	8			
30457	17376	35065	60,2948	1,7528	8			
1116	637	1285	60,2828	1,7520	5	X берилл	1.75+0.01	8.0
24395	13932	28093	60,2693	1,7510	8			
35148	20075	40477	60,2669	1,7508	8			
11869	6780	13669	60,2634	1,7506	7			
75480	43121	86929	60,2611	1,7504	8			
78171	44660	90029	60,2602	1,7504	8			

14560	8319	16769	60,2581	1,7502	7			
53985	30848	62177	60,2556	1,7500	8			
43232	24705	49793	60,2541	1,7499	8			
3807	2176	4385	60,2486	1,7495	6	Рубин		9.0
52152	29815	60073	60,2436	1,7492	8			
68257	39024	78625	60,2425	1,7491	8			
19912	11385	22937	60,2406	1,7490	7			
113851	65100	131149	60,2391	1,7489	8			
112944	64583	130105	60,2385	1,7488	8			
19005	10868	21893	60,2369	1,7487	7			
61908	35405	71317	60,2349	1,7486	8			
45803	26196	52765	60,2336	1,7485	8			
2900	1659	3341	60,2275	1,7480	6			
27813	15916	32045	60,2196	1,7475	8			
33124	18957	38165	60,2173	1,7473	8			
8211	4700	9461	60,2131	1,7470	7			
40984	23463	47225	60,2092	1,7468	8			
38293	21924	44125	60,2074	1,7466	8			
5520	3161	6361	60,2026	1,7463	7			
14287	8184	16465	60,1947	1,7457	8			
8976	5143	10345	60,1885	1,7453	8			
24206	13875	27900	60,1784	1,7446	8			
209	120	241	60,1372	1,7417	4	Пироп	1.73-1.76	7.25
7968	4585	9193	60,0827	1,7378	8			
12495	7192	14417	60,0757	1,7373	8			
4736	2727	5465	60,0666	1,7367	7			
32469	18700	37469	60,0609	1,7363	8			
34600	19929	39929	60,0588	1,7362	8			
6867	3956	7925	60,0542	1,7358	7			
27412	15795	31637	60,0491	1,7355	8			
22885	13188	26413	60,0463	1,7353	8			
2340	1349	2701	60,0367	1,7346	6	Хризберилл		8.5
36395	20988	42013	60,0291	1,7341	8			
49028	28275	56597	60,0275	1,7340	8			
14973	8636	17285	60,0249	1,7338	7			
88640	51129	102329	60,0229	1,7337	8			
89211	51460	102989	60,0222	1,7336	8			
15544	8967	17945	60,0203	1,7335	7			
53025	30592	61217	60,0178	1,7333	8			
40392	23305	46633	60,0163	1,7332	8			
2911	1680	3361	60,0098	1,7327	6	Родонит		6.0
32592	18815	37633	60,0026	1,7322	8			
40545	23408	46817	60,0007	1,7321	8			
10864	6273	12545	59,9974	1,7319	7			
58011	33500	66989	59,9946	1,7317	8			
55880	32271	64529	59,9933	1,7316	8			
8733	5044	10085	59,9902	1,7314	7			
25628	14805	29597	59,9855	1,7310	8			
17675	10212	20413	59,9822	1,7308	8			
780	451	901	59,9633	1,7295	5	Александрит	1.75+0.01	8.5
20601	11920	23801	59,9458	1,7283	8			
30644	17733	35405	59,9430	1,7281	8			

10823	6264	12505	59,9391	1,7278	7			
70928	41055	81953	59,9366	1,7276	8			
74313	43016	85865	59,9356	1,7276	8			
14208	8225	16417	59,9335	1,7274	7			
54339	31460	62789	59,9310	1,7272	8			
44296	25647	51185	59,9295	1,7271	8			
4165	2412	4813	59,9244	1,7268	6			
60456	35017	69865	59,9199	1,7265	8			
80195	46452	92677	59,9189	1,7264	8			
23904	13847	27625	59,9173	1,7263	7			
138953	80496	160585	59,9161	1,7262	8			
138800	80409	160409	59,9156	1,7262	8			
23751	13760	27449	59,9144	1,7261	7			
79124	45843	91445	59,9128	1,7260	8			
59385	34408	68633	59,9118	1,7259	8			
4012	2325	4637	59,9072	1,7256	6	Эпидот		6.5
41695	24168	48193	59,9018	1,7252	8			
13137	7616	15185	59,8976	1,7249	7			
68040	39449	78649	59,8952	1,7248	8			
64655	37488	74737	59,8942	1,7247	8			
9752	5655	11273	59,8914	1,7245	7			
27125	15732	31357	59,8871	1,7242	8			
18000	10441	20809	59,8839	1,7240	8			
627	364	725	59,8630	1,7225	5	Гроссуляр	1.734	7.0
12932	7515	14957	59,8384	1,7208	8			
18437	10716	21325	59,8339	1,7205	8			
6132	3565	7093	59,8273	1,7201	7			
38591	22440	44641	59,8227	1,7197	8			
39804	23147	46045	59,8210	1,7196	8			
7345	4272	8497	59,8169	1,7193	7			
26928	15665	31153	59,8119	1,7190	8			
21423	12464	24785	59,8090	1,7188	8			
1840	1071	2129	59,7978	1,7180	6			
24633	14344	28505	59,7874	1,7173	8			
32064	18673	37105	59,7849	1,7171	8			
9271	5400	10729	59,7808	1,7169	7			
52644	30667	60925	59,7777	1,7166	8			
52073	30336	60265	59,7763	1,7165	8			
8700	5069	10069	59,7731	1,7163	7			
28067	16356	32485	59,7686	1,7160	8			
20636	12027	23885	59,7657	1,7158	8			
1269	740	1469	59,7520	1,7149	6	Кианит		4-7
11716	6837	13565	59,7338	1,7136	8			
13795	8052	15973	59,7283	1,7132	8			
3348	1955	3877	59,7180	1,7125	7			
16393	9576	18985	59,7086	1,7119	8			
15180	8869	17581	59,7042	1,7116	8			
2135	1248	2473	59,6919	1,7107	7			
5304	3103	6145	59,6711	1,7093	8			
3225	1888	3737	59,6542	1,7082	8			
56	33	65	59,4898	1,6970	3		1.73-1.76	7.5
6487	3844	7538	59,3503	1,6876	7			

3555	2108	4133	59,3334	1,6864	8			
5904	3503	6865	59,3182	1,6854	8			
2405	1428	2797	59,2997	1,6842	7			
17220	10229	20029	59,2889	1,6834	8			
18643	11076	21685	59,2850	1,6832	8			
3828	2275	4453	59,2768	1,6826	7			
15865	9432	18457	59,2678	1,6820	8			
13516	8037	15725	59,2631	1,6817	8			
1479	880	1721	59,2475	1,6807	6	Виллемит		
24236	14427	28205	59,2359	1,6799	8			
33017	19656	38425	59,2334	1,6797	8			
10260	6109	11941	59,2296	1,6795	7			
61523	36636	71605	59,2269	1,6793	8			
62244	37067	72445	59,2257	1,6792	8			
10981	6540	12781	59,2231	1,6791	7			
38064	22673	44305	59,2197	1,6788	8			
29283	17444	34085	59,2176	1,6787	8			
2200	1311	2561	59,2089	1,6781	6	Цоизит		6.5
25773	15364	30005	59,1997	1,6775	8			
32448	19345	37777	59,1973	1,6773	8			
8875	5292	10333	59,1932	1,6771	7			
48204	28747	56125	59,1898	1,6768	8			
46781	27900	54469	59,1883	1,6767	8			
7452	4445	8677	59,1846	1,6765	7			
22487	13416	26185	59,1792	1,6761	8			
15812	9435	18413	59,1755	1,6759	8			
777	464	905	59,1557	1,6746	5	Сингалит	1.69+0.04	6.5
22560	13481	26281	59,1391	1,6735	8			
34055	20352	39673	59,1366	1,6733	8			
12272	7335	14297	59,1332	1,6731	7			
81485	48708	94933	59,1310	1,6729	8			
85800	51289	99961	59,1301	1,6729	8			
16587	9916	19325	59,1283	1,6728	7			
52765	31548	61477	59,1250	1,6725	8			
5092	3045	5933	59,1207	1,6722	6			
75555	45188	88037	59,1172	1,6720	8			
100724	60243	117365	59,1164	1,6720	8			
30261	18100	35261	59,1151	1,6719	7			
176960	105849	206201	59,1142	1,6718	8			
177203	105996	206485	59,1138	1,6718	8			
30504	18247	35545	59,1128	1,6717	7			
102425	61272	119353	59,1116	1,6716	8			
77256	46217	90025	59,1108	1,6716	8			
5335	3192	6217	59,1074	1,6714	6	Диопсид		7.0
56896	34047	66305	59,1034	1,6711	8			
69849	41800	81401	59,1023	1,6710	8			
18288	10945	21313	59,1003	1,6709	7			
95763	57316	111605	59,0987	1,6708	8			
91448	54735	106577	59,0979	1,6707	8			
13973	8364	16285	59,0960	1,6706	7			
39644	23733	46205	59,0930	1,6704	8			
26691	15980	31109	59,0909	1,6703	8			

1020	611	1189	59,0776	1,6694	5	Хризолит	1.67+0.04	6.5
23345	13992	27217	59,0633	1,6685	8			
33908	20325	39533	59,0609	1,6683	8			
11583	6944	13505	59,0573	1,6681	7			
74240	44511	86561	59,0550	1,6679	8			
77121	46240	89921	59,0541	1,6678	8			
14464	8673	16865	59,0520	1,6677	7			
54075	32428	63053	59,0495	1,6675	8			
43512	26095	50737	59,0481	1,6674	8			
3901	2340	4549	59,0427	1,6671	6			
54312	32585	63337	59,0380	1,6668	8			
71355	42812	83213	59,0368	1,6667	8			
20944	12567	24425	59,0350	1,6666	7			
120321	72200	140321	59,0337	1,6665	8			
119600	71769	139481	59,0331	1,6665	8			
20223	12136	23585	59,0317	1,6664	7			
66308	39795	77333	59,0298	1,6662	8			
49265	29568	57457	59,0285	1,6662	8			
3180	1909	3709	59,0230	1,6658	6	Корнерупп		6.5
31255	18768	36457	59,0160	1,6653	8			
37492	22515	43733	59,0140	1,6652	8			
9417	5656	10985	59,0103	1,6650	7			
47560	28569	55481	59,0070	1,6647	8			
44679	26840	52121	59,0055	1,6646	8			
6536	3927	7625	59,0014	1,6644	7			
17325	10412	20213	58,9949	1,6639	8			
11088	6665	12937	58,9899	1,6636	8			
299	180	349	58,9518	1,6611	4	Сподумен	1.67+0.01	7.0
35006	21075	40860	58,9504	1,6610	8			
13176	7943	15385	58,9168	1,6588	8			
21037	12684	24565	58,9126	1,6585	8			
8160	4921	9529	58,9073	1,6582	7			
56743	34224	66265	58,9041	1,6580	8			
60784	36663	70985	58,9029	1,6579	8			
12201	7360	14249	58,9004	1,6577	7			
49324	29757	57605	58,8976	1,6576	8			
41463	25016	48425	58,8960	1,6575	8			
4340	2619	5069	58,8909	1,6571	6			
68753	41496	80305	58,8868	1,6569	8			
92988	56125	108613	58,8860	1,6568	8			
28575	17248	33377	58,8846	1,6567	7			
169944	102583	198505	58,8836	1,6566	8			
171361	103440	200161	58,8832	1,6566	8			
29992	18105	35033	58,8823	1,6566	7			
102907	62124	120205	58,8810	1,6565	8			
78672	47495	91897	58,8802	1,6564	8			
5757	3476	6725	58,8770	1,6562	6	Фибролит		7.5
65552	39585	76577	58,8734	1,6560	8			
81915	49468	95693	58,8725	1,6559	8			
22120	13359	25841	58,8708	1,6558	7			
118881	71800	138881	58,8695	1,6557	8			
114840	69361	134161	58,8689	1,6557	8			

18079	10920	21121	58,8674	1,6556	7			
53628	32395	62653	58,8651	1,6554	8			
37265	22512	43537	58,8636	1,6553	8			
1716	1037	2005	58,8549	1,6548	5	Жадент	1.65	7.0
47107	28476	55045	58,8472	1,6543	8			
70500	42619	82381	58,8460	1,6542	8			
25109	15180	29341	58,8443	1,6541	7			
165456	100033	193345	58,8433	1,6540	8			
173715	105028	202997	58,8429	1,6540	8			
33368	20175	38993	58,8420	1,6539	7			
128313	77584	149945	58,8409	1,6539	8			
104920	63441	122609	58,8403	1,6538	8			
9975	6032	11657	58,8382	1,6537	6	Бронзит		
146160	88391	170809	58,8363	1,6536	8			
194297	117504	227065	58,8359	1,6535	8			
58112	35145	67913	58,8353	1,6535	7			
338675	204828	395797	58,8348	1,6535	8			
338664	204823	395785	58,8346	1,6534	8			
58101	35140	67901	58,8341	1,6534	7			
194220	117469	226981	58,8334	1,6534	8			
146083	88356	170725	58,8330	1,6533	8			
9964	6027	11645	58,8312	1,6532	6	Энстатит		5.5
104733	63356	122405	58,8291	1,6531	8			
128060	77469	149669	58,8285	1,6530	8			
33291	20140	38909	58,8274	1,6530	7			
173264	104823	202505	58,8265	1,6529	8			
165005	99828	192853	58,8261	1,6529	8			
25032	15145	29257	58,8250	1,6528	7			
70247	42504	82105	58,8233	1,6527	8			
46920	28391	54841	58,8221	1,6526	8			
1705	1032	1993	58,8144	1,6521	5	Андалузит	1.64+0.01	7.5
36924	22357	43165	58,8056	1,6516	8			
53111	32160	62089	58,8041	1,6515	8			
17892	10835	20917	58,8018	1,6513	7			
113597	68796	132805	58,8003	1,6512	8			
117572	71205	137453	58,7997	1,6512	8			
21867	13244	25565	58,7983	1,6511	7			
80936	49023	94625	58,7967	1,6510	8			
64749	39220	75701	58,7957	1,6509	8			
5680	3441	6641	58,7921	1,6507	6	Фенакит		7.5
77539	46980	90661	58,7888	1,6505	8			
101400	61439	118561	58,7880	1,6504	8			
29541	17900	34541	58,7868	1,6503	7			
168732	102245	197293	58,7858	1,6503	8			
167315	101388	195637	58,7854	1,6502	8			
28124	17043	32885	58,7844	1,6502	7			
91481	55440	106969	58,7830	1,6501	8			
67620	40981	79069	58,7821	1,6500	8			
4263	2584	4985	58,7780	1,6498	6	Жадент		7.0
40660	24651	47549	58,7728	1,6494	8			
48345	29312	56537	58,7712	1,6493	8			
11948	7245	13973	58,7683	1,6491	7			

59475	36068	69557	58,7657	1,6490	8			
55500	33659	64909	58,7645	1,6489	8			
7973	4836	9325	58,7612	1,6487	7			
20520	12449	24001	58,7558	1,6483	8			
12835	7788	15013	58,7515	1,6480	8			
288	175	337	58,7155	1,6457	4	Топаз	1.63+0.01	8.0
33675	20470	39408	58,7059	1,6451	8			
10549	6420	12349	58,6758	1,6431	8			
16456	10017	19265	58,6705	1,6428	8			
6195	3772	7253	58,6637	1,6424	7			
42292	25755	49517	58,6594	1,6421	8			
44997	27404	52685	58,6578	1,6420	8			
8900	5421	10421	58,6544	1,6418	7			
35391	21560	41441	58,6505	1,6415	8			
29484	17963	34525	58,6483	1,6414	8			
2993	1824	3505	58,6410	1,6409	6			
46284	28213	54205	58,6351	1,6405	8			
62271	37960	72929	58,6338	1,6404	8			
18980	11571	22229	58,6318	1,6403	7			
112197	68404	131405	58,6303	1,6402	8			
112852	68805	132173	58,6297	1,6402	8			
19635	11972	22997	58,6282	1,6401	7			
66856	40767	78305	58,6263	1,6400	8			
50869	31020	59581	58,6251	1,6399	8			
40619	24780	47581	58,6143	1,6392	8			
50456	30783	59105	58,6128	1,6391	8			
13485	8228	15797	58,6102	1,6389	7			
71852	43845	84173	58,6079	1,6388	8			
69147	42196	81005	58,6069	1,6387	8			
10780	6579	12629	58,6044	1,6385	7			
31521	19240	36929	58,6007	1,6383	8			
21684	13237	25405	58,5980	1,6381	8			
943	576	1105	58,5827	1,6372	5	Турмалин	1.63+0.02	7.0
24568	15015	28793	58,5684	1,6362	8			
36465	22288	42737	58,5660	1,6361	8			
12840	7849	15049	58,5629	1,6359	7			
83979	51340	98429	58,5607	1,6357	8			
87920	53751	103049	58,5599	1,6357	8			
16781	10260	19669	58,5581	1,6356	7			
64052	39165	75077	58,5560	1,6354	8			
52155	31892	61133	58,5548	1,6354	8			
4884	2987	5725	58,5505	1,6351	6	Даголит		6.5
70645	43212	82813	58,5468	1,6348	8			
93636	57277	109765	58,5459	1,6348	8			
27875	17052	32677	58,5446	1,6347	7			
161880	99031	189769	58,5436	1,6346	8			
161637	98884	189485	58,5431	1,6346	8			
27632	16905	32393	58,5421	1,6345	7			
91935	56248	107777	58,5407	1,6345	8			
68944	42183	80825	58,5399	1,6344	8			
4641	2840	5441	58,5360	1,6342	6	Пренит		6.0
48024	29393	56305	58,5314	1,6339	8			

15080	9231	17681	58,5277	1,6336	7			
77957	47724	91405	58,5257	1,6335	8			
74016	45313	86785	58,5248	1,6334	8			
11139	6820	13061	58,5224	1,6333	7			
30876	18907	36205	58,5187	1,6330	8			
20437	12516	23965	58,5159	1,6329	8			
700	429	821	58,4977	1,6317	5	Топаз	1.63+0.01	8.0
14151	8680	16601	58,4757	1,6303	8			
20100	12331	23581	58,4716	1,6300	8			
6649	4080	7801	58,4656	1,6297	7			
41688	25585	48913	58,4615	1,6294	8			
42935	26352	50377	58,4599	1,6293	8			
7896	4847	9265	58,4561	1,6290	7			
28829	17700	33829	58,4515	1,6288	8			
22880	14049	26849	58,4488	1,6286	8			
1947	1196	2285	58,4385	1,6279	6	Аметист		7.5
25840	15879	30329	58,4288	1,6273	8			
33565	20628	39397	58,4264	1,6272	8			
9672	5945	11353	58,4226	1,6269	7			
54775	33672	64297	58,4196	1,6267	8			
54120	33271	63529	58,4183	1,6266	8			
9017	5544	10585	58,4152	1,6264	7			
28980	17821	34021	58,4109	1,6262	8			
21255	13072	24953	58,4081	1,6260	8			
1292	795	1517	58,3950	1,6252	6	Андалузит		7.5
11745	7232	13793	58,3773	1,6240	8			
13764	8477	16165	58,3718	1,6237	8			
3311	2040	3889	58,3616	1,6230	7			
16080	9911	18889	58,3522	1,6224	8			
14833	9144	17425	58,3477	1,6222	8			
2064	1273	2425	58,3352	1,6214	7			
5035	3108	5917	58,3138	1,6200	8			
3016	1863	3545	58,2961	1,6189	8			
45	28	53	58,1092	1,6071	3	Берилл	1.62	7.5
2444	1533	2885	57,9020	1,5943	8			
3995	2508	4717	57,8800	1,5929	8			
5156	3239	6086	57,8630	1,5918	7			
1596	1003	1885	57,8529	1,5912	7			
11297	7104	13345	57,8367	1,5902	8			
12180	7661	14389	57,8308	1,5899	8			
2479	1560	2929	57,8184	1,5891	7			
10176	6407	12025	57,8047	1,5883	8			
8625	5432	10193	57,7974	1,5878	8			
928	585	1097	57,7732	1,5863	6	Бразилиант		5.0
15015	9472	17753	57,7548	1,5852	8			
20400	12871	24121	57,7509	1,5850	8			
6313	3984	7465	57,7448	1,5846	7			
37740	23821	44629	57,7404	1,5843	8			
38135	24072	45097	57,7386	1,5842	8			
6708	4235	7933	57,7343	1,5839	7			
23165	14628	27397	57,7288	1,5836	8			
17780	11229	21029	57,7254	1,5834	8			

1323	836	1565	57,7113	1,5825	6	Анортит		
15340	9699	18149	57,6961	1,5816	8			
19261	12180	22789	57,6921	1,5814	8			
5244	3317	6205	57,6853	1,5809	7			
28375	17952	33577	57,6797	1,5806	8			
27492	17395	32533	57,6773	1,5805	8			
4361	2760	5161	57,6710	1,5801	7			
13080	8281	15481	57,6619	1,5795	8			
9159	5800	10841	57,6557	1,5791	8			
440	279	521	57,6216	1,5771	5	Аквамарин,	1.57+0.01	7.5
12533	7956	14845	57,5925	1,5753	8			
18864	11977	22345	57,5880	1,5750	8			
6771	4300	8021	57,5820	1,5747	7			
44844	28483	53125	57,5780	1,5744	8			
47173	29964	55885	57,5765	1,5743	8			
9100	5781	10781	57,5732	1,5741	7			
28836	18323	34165	57,5673	1,5738	8			
2769	1760	3281	57,5596	1,5733	6	Псевдофит		2.5
40916	26013	48485	57,5532	1,5729	8			
54495	34648	64577	57,5517	1,5728	8			
16348	10395	19373	57,5494	1,5727	7			
95493	60724	113165	57,5477	1,5726	8			
95580	60781	113269	57,5470	1,5725	8			
16435	10452	19477	57,5453	1,5724	7			
55104	35047	65305	57,5430	1,5723	8			
41525	26412	49213	57,5416	1,5722	8			
2856	1817	3385	57,5353	1,5718	6	Морганит		
30315	19292	35933	57,5280	1,5714	8			
37168	23655	44057	57,5259	1,5713	8			
9709	6180	11509	57,5223	1,5710	7			
50740	32301	60149	57,5192	1,5708	8			
48411	30820	57389	57,5179	1,5708	8			
7380	4699	8749	57,5142	1,5705	7			
20865	13288	24737	57,5087	1,5702	8			
14012	8925	16613	57,5047	1,5700	8			
527	336	625	57,4796	1,5685	5	Псевдофит	1.57	2.5
11856	7567	14065	57,4523	1,5668	8			
17169	10960	20369	57,4475	1,5665	8			
5840	3729	6929	57,4407	1,5661	7			
37323	23836	44285	57,4360	1,5658	8			
38728	24735	45953	57,4342	1,5657	8			
7245	4628	8597	57,4302	1,5655	7			
27004	17253	32045	57,4253	1,5652	8			
21691	13860	25741	57,4225	1,5650	8			
1932	1235	2293	57,4119	1,5644	6	Изумруд		7.0
26741	17100	31741	57,4024	1,5638	8			
35084	22437	41645	57,4002	1,5637	8			
10275	6572	12197	57,3966	1,5635	7			
58928	37695	69953	57,3938	1,5633	8			
58533	37444	69485	57,3926	1,5632	8			
9880	6321	11729	57,3898	1,5630	7			
32319	20680	38369	57,3860	1,5628	8			

23976	15343	28465	57,3835	1,5627	8			
1537	984	1825	57,3723	1,5620	6	Аквамарин		7.5
14976	9593	17785	57,3581	1,5611	8			
17919	11480	21281	57,3539	1,5609	8			
4480	2871	5321	57,3463	1,5604	7			
22533	14444	26765	57,3395	1,5600	8			
21128	13545	25097	57,3364	1,5598	8			
3075	1972	3653	57,3279	1,5593	7			
8084	5187	9605	57,3142	1,5585	8			
5141	3300	6109	57,3037	1,5579	8			
132	85	157	57,2209	1,5529	4	Кварц	1.55+0.01	7.0
5555	3588	6613	57,1414	1,5482	8			
8820	5699	10501	57,1317	1,5476	8			
3397	2196	4045	57,1192	1,5469	7			
14955	9670	17808	57,1130	1,5465	8			
23520	15209	28009	57,1116	1,5465	8			
25155	16268	29957	57,1088	1,5463	8			
5032	3255	5993	57,1028	1,5459	7			
20265	13112	24137	57,0960	1,5455	8			
17000	11001	20249	57,0924	1,5453	8			
1767	1144	2105	57,0800	1,5446	6	Битовнит		
27840	18031	33169	57,0703	1,5440	8			
37609	24360	44809	57,0682	1,5439	8			
11536	7473	13745	57,0649	1,5437	7			
68515	44388	81637	57,0625	1,5435	8			
69048	44735	82273	57,0615	1,5435	8			
12069	7820	14381	57,0591	1,5434	7			
41340	26789	49261	57,0561	1,5432	8			
31571	20460	37621	57,0542	1,5431	8			
2300	1491	2741	57,0462	1,5426	6	Лабрадор		
26061	16900	31061	57,0375	1,5421	8			
32524	21093	38765	57,0351	1,5419	8			
8763	5684	10445	57,0311	1,5417	7			
47008	30495	56033	57,0277	1,5415	8			
45373	29436	54085	57,0263	1,5414	8			
7128	4625	8497	57,0225	1,5412	7			
21079	13680	25129	57,0169	1,5409	8			
14616	9487	17425	57,0131	1,5406	8			
665	432	793	56,9913	1,5394	5	Халцедон	1.53+0.01	7.0
18060	11741	21541	56,9717	1,5382	8			
26983	17544	32185	56,9686	1,5380	8			
9588	6235	11437	56,9644	1,5378	7			
63085	41028	75253	56,9616	1,5376	8			
66196	43053	78965	56,9606	1,5375	8			
12699	8260	15149	56,9582	1,5374	7			
48760	31719	58169	56,9555	1,5372	8			
39837	25916	47525	56,9539	1,5372	8			
3776	2457	4505	56,9484	1,5368	6	Скаполит		6.0
55187	35916	65845	56,9437	1,5366	8			
73320	47719	87481	56,9426	1,5365	8			
21909	14260	26141	56,9409	1,5364	7			
127596	83053	152245	56,9397	1,5363	8			

127555	83028	152197	56,9391	1,5363	8			
21868	14235	26093	56,9378	1,5362	7			
73033	47544	87145	56,9361	1,5361	8			
54900	35741	65509	56,9351	1,5361	8			
3735	2432	4457	56,9303	1,5358	6	Олигоклаз		
39140	25491	46709	56,9247	1,5354	8			
47817	31144	57065	56,9231	1,5354	8			
12412	8085	14813	56,9204	1,5352	7			
64515	42028	76997	56,9180	1,5350	8			
61404	40003	73285	56,9169	1,5350	8			
9301	6060	11101	56,9140	1,5348	7			
26040	16969	31081	56,9097	1,5346	8			
17363	11316	20725	56,9065	1,5344	8			
624	407	745	56,8859	1,5332	5	Амазонит	1.53+0.01	7.0
13345	8712	15937	56,8623	1,5318	8			
19152	12505	22873	56,8581	1,5315	8			
6431	4200	7681	56,8520	1,5312	7			
40740	26611	48661	56,8478	1,5309	8			
42129	27520	50321	56,8462	1,5309	8			
28875	18868	34493	56,8379	1,5304	8			
23068	15075	27557	56,8353	1,5302	8			
2013	1316	2405	56,8253	1,5296	6	Солнечный камень		
27348	17885	32677	56,8162	1,5291	8			
35723	23364	42685	56,8140	1,5290	8			
10388	6795	12413	56,8105	1,5288	7			
59249	38760	70801	56,8078	1,5286	8			
58716	38413	70165	56,8066	1,5285	8			
9855	6448	11777	56,8038	1,5284	7			
31992	20935	38233	56,8000	1,5282	8			
23617	15456	28225	56,7975	1,5280	8			
1480	969	1769	56,7860	1,5273	6	Альбит		6.0
14007	9176	16745	56,7712	1,5265	8			
16616	10887	19865	56,7667	1,5262	8			
4089	2680	4889	56,7585	1,5257	7			
20276	13293	24245	56,7510	1,5253	8			
18887	12384	22585	56,7476	1,5251	8			
2700	1771	3229	56,7381	1,5246	7			
6893	4524	8245	56,7224	1,5237	8			
4284	2813	5125	56,7099	1,5229	8			
91	60	109	56,6015	1,5167	4	Сердолик	1.53+0.01	7.0
3132	2075	3757	56,4749	1,5094	8			
4845	3212	5813	56,4576	1,5084	8			
1804	1197	2165	56,4347	1,5071	7			
12231	8120	14681	56,4203	1,5063	8			
12980	8619	15581	56,4150	1,5060	8			
2553	1696	3065	56,4033	1,5053	7			
10088	6705	12113	56,3900	1,5045	8			
8375	5568	10057	56,3826	1,5041	8			
9994	6645	12000	56,3801	1,5040	8			
840	559	1009	56,3572	1,5027	6	Ортоклаз		
12865	8568	15457	56,3367	1,5015	8			

17272	11505	20753	56,3321	1,5013	8			
5247	3496	6305	56,3251	1,5009	7			
30940	20619	37181	56,3198	1,5006	8			
31089	20720	37361	56,3176	1,5004	8			
5396	3597	6485	56,3124	1,5001	7			
18315	12212	22013	56,3056	1,4998	8			
13908	9275	16717	56,3014	1,4995	8			
989	660	1189	56,2832	1,4985	6	Лунный камень		
10908	7285	13117	56,2627	1,4973	8			
13515	9028	16253	56,2571	1,4970	8			
3596	2403	4325	56,2475	1,4965	7			
19089	12760	22961	56,2393	1,4960	8			
18340	12261	22061	56,2357	1,4958	8			
2847	1904	3425	56,2264	1,4953	7			
8272	5535	9953	56,2125	1,4945	8			
5665	3792	6817	56,2027	1,4939	8			
240	161	289	56,1450	1,4907	5	Молдавит	1.49	5.0
6099	4100	7349	56,0894	1,4876	8			
9016	6063	10865	56,0803	1,4871	8			
3157	2124	3805	56,0677	1,4863	7			
20572	13845	24797	56,0594	1,4859	8			
21507	14476	25925	56,0562	1,4857	8			
4092	2755	4933	56,0490	1,4853	7			
15561	10480	18761	56,0406	1,4848	8			
12644	8517	15245	56,0358	1,4846	8			
1175	792	1417	56,0184	1,4836	6			
16884	11387	20365	56,0033	1,4827	8			
22345	15072	26953	55,9998	1,4826	8			
6636	4477	8005	55,9943	1,4822	7			
38467	25956	46405	55,9901	1,4820	8			
38380	25899	46301	55,9883	1,4819	8			
6549	4420	7901	55,9841	1,4817	7			
21736	14673	26225	55,9785	1,4814	8			
16275	10988	19637	55,9749	1,4812	8			
1088	735	1313	55,9589	1,4803	6	Обсидиан		
11165	7548	13477	55,9397	1,4792	8			
3483	2356	4205	55,9245	1,4784	7			
17940	12139	21661	55,9160	1,4779	8			
17005	11508	20533	55,9121	1,4777	8			
2548	1725	3077	55,9019	1,4771	7			
7015	4752	8473	55,8861	1,4762	8			
4620	3131	5581	55,8743	1,4756	8			
2968	2025	3593	55,6952	1,4657	8			
4183	2856	5065	55,6762	1,4646	8			
1368	935	1657	55,6482	1,4631	7			
8509	5820	10309	55,6286	1,4620	8			
8736	5977	10585	55,6208	1,4616	8			
1595	1092	1933	55,6029	1,4606	7			
5772	3955	6997	55,5809	1,4594	8			
4557	3124	5525	55,5679	1,4587	8			
380	261	461	55,5171	1,4559	6	Вивианит	Ог. опал	2.0

4947	3404	6005	55,4684	1,4533	8		
6396	4403	7765	55,4565	1,4526	8		
1829	1260	2221	55,4370	1,4516	7		
10296	7097	12505	55,4216	1,4508	8		
10147	6996	12325	55,4151	1,4504	8		
1680	1159	2041	55,3989	1,4495	7		
5353	3696	6505	55,3767	1,4483	8		
3904	2697	4745	55,3621	1,4475	8		
231	160	281	55,2920	1,4438	6	Опал	6.0
2024	1407	2465	55,1946	1,4385	8		
2345	1632	2857	55,1641	1,4369	8		
552	385	673	55,1056	1,4338	7		
2627	1836	3205	55,0505	1,4308	8		
2400	1679	2929	55,0240	1,4294	8		
325	228	397	54,9489	1,4254	7		
756	533	925	54,8152	1,4184	8		
435	308	533	54,6998	1,4123	8		
4	3	5	53,1301	1,3333	1	?	
55	48	73	48,8879	1,1458	3	?	
72	65	97	47,9250	1,1077	3	?	
21	20	29	46,3972	1,0500	2	?	

На основании вышеизложенного можно сделать *следующие основные выводы*

1.Использование **m n параметров** позволяет создавать упорядоченные множества углов в рассматриваемой системе координат.

2.Показатель преломления зависит от параметров кристаллической решетки минерала. Рациональность значений показателей преломления кристаллов позволяет предложить методику создания упорядоченного множества минералов.

3.Тангенс угла α основного пифагорова треугольника с учетом коэффициента коррекции $\eta=1.0075$ равен углу Брюстера, $\rightarrow n=1.0075 \cdot \operatorname{tg} \alpha$, где n -показатель преломления.

4.Использование таблицы упорядоченного множества минералов дает возможность не только систематизировать их по уровням дерева множества, но и предсказать показатели преломления еще не открытых минералов.

5.Для составления информативной таблицы упорядоченного множества минералов как базы данных необходимы обширные и достоверные сведения о показателях преломления минералов и дерево упорядоченного множества углов (дерева основных ПТ) до десятого уровня включительно.

6.При составлении таблицы упорядоченного множества необходимо использовать требования **Постулатов 1-4**.

7.Значение коэффициента коррекции η может быть уточнено на основе большого объема статистических данных.

8.Симметрия и асимметрия окружения показателя преломления на дереве множества может быть использована для определения спектра поглощения конкретного минерала.

Внимание: В связи с недостатком справочных материалов по показателям преломления, местоположения отдельных минералов на дереве упорядоченного множества углов (дереве ПТ) могут быть уточнены.

Глава 4. Возможности системы mn параметров

4.1 Магистральные направления возможных приращений значений координат точки

1. Предел приращений элементов координатного треугольника.

ВНИМАНИЕ !

Здесь не ставится задача ревизии и отмены современного понятия производной функции, а предлагается методика рассмотрения координат точки как взаимосвязанную систему двух уравнений от двух переменных.

В системе mn параметров элементы координатного треугольника могут быть представлены в виде аналитических выражений любого из восьми вариантов (см. Табл.1). Каждый из этих вариантов определяет взаимосвязанную систему уравнений. Задание координатной системы, т.е. фиксирование начала координат, осей, градации этих осей, задают для каждой точки координат, систему уравнений вида

$$x = \varphi_1(m, n); \quad y = \varphi_2(m, n)$$

Если задана точка $M_0(x_0, y_0)$, то следовательно заданы и элементы координатного треугольника, т.е.

$$x_0, y_0, z_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Выбрав вариант аналитических выражений для x_0, y_0 , получим систему двух уравнений вида (1). Решив эту систему получим значения m, n .

Обратим внимание на то, что система уравнений вида (1) при заданных x_0, y_0 однозначно определяет местоположение точки M_0 и эта система уравнений НЕ ЗАВИСИТ от вида функции $y=f(x)$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Такой подход дает возможность, не изменяя понятия о производной функции, рассматривать любую точку координатной системы $M_i(x_i, y_i)$ как пункт (развилку) возможных приращений значений координат точки M_i . При этом **число дальнейших возможных приращений элементов $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ будет КОНЕЧНЫМ, а не БЕСКОНЕЧНЫМ и число касательных к точке M_i также будет конечным.** Это утверждение может вызвать несогласие с постулатами непрерывных функций, однако ввод параметров mn фактически реализует переход к дискретности системы координат.

Перейдем к рассмотрению возможных предельно малых приращений $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$. Рассмотрим случаи

1. $n = \text{Var}, m = \text{Const}$
2. $n = \text{Const}, m = \text{Var}$
3. $n = \text{Var}, m = \text{Var}$

Таблица 1

№	0	1	2	3	4	5	6	7
$2m^2$	z_0+x_0	z_0+x_0	z_0-x_0	z_0-x_0	z_0+y_0	z_0+y_0	z_0-y_0	z_0-y_0
n^2	z_0+y_0	z_0-y_0	z_0-y_0	z_0+y_0	z_0+x_0	z_0-x_0	z_0-x_0	z_0+x_0
x_0	$2mn-n^2$	$2mn-n^2$	$2mn+n^2$	$(2mn+2m^2)$	$2mn-2m^2$	$2m^2-2mn$	$2mn+2m^2$	$-(2mn+2m^2)$
y_0	$2mn-2m^2$	$2m^2-2mn$	$2mn+2m^2$	$-(2mn+2m^2)$	$2mn-n^2$	$2mn-n^2$	$2mn+n^2$	$2mn+n^2$
z_0	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$

Здесь не ставится задача ревизии понятия производной.

Как известно, производной функции одной переменной называют предел отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx , когда Δx стремится к нулю

$$y'_x = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Если $y=f(x)$ изображена своим графиком – кривой, в декартовых координатах (Рис.1), то $y'=tg\varphi$, где φ -угол между осью Ox и касательной к кривой в данный ее точке, отсчитываемой от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. На Рис.1 показано графическое представление производной, при этом приращения Δx и Δy , для наглядности, даны в увеличенном виде.

Из Рис.1 видно, что чем меньше значение Δx_0 , тем ближе точка M_i к точке M_0 .

Перейдем к системе mn параметров. Для проведения типового расчета приращений функции и аргумента используем второй вариант из таблицы 1.

Типовой расчет приращений.

Пусть $n=Var$, $m=Const$

$$1. \quad \begin{aligned} \Delta x_0 &= n_{\Delta}^2 + 2m_{\Delta}n_{\Delta} \\ \Delta y_0 &= 2m_{\Delta}^2 + 2m_{\Delta}n_{\Delta} \\ \Delta z_0 &= n_{\Delta}^2 + 2m_{\Delta}n_{\Delta} + 2m_{\Delta}^2 \end{aligned}$$

2. Поместим точку M_0 (см. Рис.1) в начало НОВОЙ системы координат (Рис.2)

3. Введем обозначение

$$L = \lim_{n_{\Delta} \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{n_{\Delta} \rightarrow 0} \frac{2m_{\Delta}^2 + 2m_{\Delta}n_{\Delta}}{n_{\Delta}^2 + 2m_{\Delta}n_{\Delta}}$$

Здесь n_{Δ}^2 – величина бесконечно малая второго порядка и поэтому ею можно пренебречь и тогда

$$L = \frac{m_{\Delta}}{n_{\Delta}} + 1 \quad \rightarrow \quad m_{\Delta} = n_{\Delta} (L - 1)$$

4. Подставив данное значение m_{Δ} в формулы (3)

$$\begin{aligned} \rightarrow \Delta x_0 &= n_{\Delta}^2 + 2n_{\Delta}^2(L-1) = n_{\Delta}^2(2L-1) \\ \Delta y_0 &= 2n_{\Delta}^2(L-1)^2 + 2n_{\Delta}^2(L-1) = 2n_{\Delta}^2L(L-1) \\ \Delta z_0 &= n_{\Delta}^2[2L(L-1)+1] \end{aligned}$$

5. Обратим внимание на то, что в этих значениях элементов имеет место общий множитель n_{Δ}^2 . В п.3 было принято условие, что n_{Δ}^2 – величина бесконечно малая второго порядка и поэтому элементы $\Delta x_0, \Delta y_0$

ΔZ_0 - также бесконечно малые величины.

Однако Π_{Δ}^2 являясь малой величиной **не равна** нулю и поэтому ее можно сократить как обычный множитель.

Сократив формулы (5) на Π_{Δ}^2 получим новые значения элементов

$$\begin{aligned} X &= 2L-1 \\ Y &= 2L(L-1) \\ Z &= 2L(L-1)+1 \end{aligned}$$

Это элементы основного пифагорова треугольника.

$$\text{ПТ}[2L-1, 2L(L-1), 2L(L-1)+1]$$

6. Луч этого ПТ дает направление приращения ΔZ_0 (Рис.2). ПТ(6) обладает тем свойством, что Y меньше Z точно на единицу.

$$\begin{aligned} n &= \pm \sqrt{Z - Y} = \pm 1 \rightarrow Z - X = 2m^2 = 2L^2 - 2L + 1 - 2L + 1 = 2(L - 1)^2 \\ \rightarrow m &= \pm(L - 1) \\ \rightarrow L_1 &= m + 1 \\ \rightarrow L_2 &= 1 - m \end{aligned}$$

7. Для L_1

$$\begin{aligned} X_1 &= 2m+1 \\ Y_1 &= 2(m+1)m \\ Z_1 &= 2m(m+1)+1 \end{aligned}$$

Для L_2

$$\begin{aligned} X_2 &= -(2m-1) \\ Y_2 &= 2m(m-1) \\ Z_2 &= 2m(m-1)+1 \end{aligned}$$

На этом типовой расчет закончен. Подобные расчеты для первых четырех вариантов формул таблицы дают результаты mn параметров представленные в таблице 2.

Таблица 2

№	1	2	3	4
X	2m+1	2m-1	2m+3	2m-3
Y	2m(m+1)	2m(m-1)	2(m+1)(m+2)	2(m-1)(m-2)
Z	2m(m+1)+1	2m(m-1)+1	2(m+1)(m+2)+1	2(m-1)(m-2)+1

В таблице 2 даны значения элементов основных пифагоровых треугольников в координатной системе $\Delta X, \Delta Y$ (рис. 3). На этом рисунке точка N-вершина ПТ (X,Y,Z), ее координаты в системе осей x,y

$$\begin{aligned} x_N &= x_0 + X \\ y_N &= y_0 + Y \end{aligned}$$

Уравнение прямой проходящей через точки Mo и N имеет вид:

$$\frac{y - y_0}{y_N - y_0} = \frac{x - x_0}{x_N - x_0} \rightarrow \frac{Y - Y_0}{X - X_0} = \frac{Y}{X}$$

Это уравнение луча ПТ(X,Y,Z), где

X, Y – переменные

y_0, x_0, Y, X – постоянные

X, Y -элементы пифагорова треугольника (см.табл.2)

Для определения значений X, Y необходимо иметь значение параметра m. Этот параметр можно определить из значений координат точки $M_0(x_0, y_0)$

$$\rightarrow z_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2} \rightarrow m_1 = \sqrt{\frac{z_o + x_o}{2}}, \rightarrow m_2 = \sqrt{\frac{z_o - x_o}{2}}$$

$$m_3 = \sqrt{\frac{z_o + y_o}{2}} \quad m_4 = \sqrt{\frac{z_o - y_o}{2}}$$

На основании проведенного расчета можно сделать следующее утверждение

Утверждение 1 “Из любой точки $M_o(x_o, y_o)$ координатной системы (xoy) дальнейшие перемещения (бесконечно малые приращения) аргумента и функции $y=f(x)$, проходящей через точку M_o , возможно только по конечному числу строго определенных направлений в соответствии с уравнением прямой

$$\frac{Y - Y_o}{X - X_o} = \frac{Y}{X}$$

где x, y - текущие значения

переменных

x_o, y_o - координаты точки M_o

X, Y - элементы пифагорова треугольника в соответствии с табл.2.

m - параметр элементов X, Y имеющий четыре возможных значения

$$m_1 = \sqrt{\frac{z_o + x_o}{2}}, \quad m_2 = \sqrt{\frac{z_o - x_o}{2}}, \quad m_3 = \sqrt{\frac{z_o + y_o}{2}}, \quad m_4 = \sqrt{\frac{z_o - y_o}{2}}$$

$$z_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$$

“.

Или иначе :

“Через заданную точку $M_o(x_o, y_o)$ координатной системы (xoy) можно провести конечное число касательных по строго определенным направлениям по которым возможны дальнейшие перемещения (бесконечно малые приращения) аргумента и функции $y=f(x)$, проходящей через точку M_o “.

Пример 1. В прямоугольной системе координат XOY задана точка M_o с координатами $X_o=7, Y_o=24$. Определить направления бесконечно малых возможных приращений $\Delta X_o, \Delta Y_o, \Delta Z_o$ для m_1 и m_2 .

Решение.

$$1. z_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

2. Определим значения m для точки M_0

$$z_0 + x_0 = 25 + 7 = 32 \rightarrow 2m_1^2 = 32 \rightarrow m_1 = 4$$

$$z_0 - x_0 = 25 - 7 = 18 \rightarrow 2m_2^2 = 18 \rightarrow m_2 = 3$$

3. Пусть $m_1 = 4$. На основании формул таблицы 2

$$X_1 = 9, Y_1 = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40, Z_1 = 41$$

$$X_2 = 7, Y_2 = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24, Z_2 = 25$$

$$X_3 = 11, Y_3 = 2 \cdot 5 \cdot 6 = 60, Z_3 = 61$$

$$X_4 = 5, Y_4 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12, Z_4 = 13$$

4. Пусть $m_2 = 3$. Тогда получим дополнительный ПТ

$$X_5 = 3, Y_5 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4, Z_5 = 5$$

5. Определим по формуле (4.3) уравнения прямых, проходящих через вершины полученных ПТ и точку M_0 .

5.1. $X_1 = 9, Y_1 = 40$

$$\rightarrow \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{Y_1}{X_1} \rightarrow y = \frac{Y_1}{X_1}x - \frac{Y_1}{X_1}x_0 + y_0 \rightarrow y = \frac{40}{9}x - \frac{40}{9} \cdot 7 + 24$$

$$\rightarrow y = \frac{40}{9}x - \frac{64}{9}$$

5.2. $X_2 = 7, Y_2 = 24$

$$\rightarrow y = \frac{24}{7}x - \frac{24}{7} \cdot 7 + 24 \rightarrow y = \frac{24}{7}x$$

5.3. $X_3 = 11, Y_3 = 60$

$$\rightarrow y = \frac{60}{11}x - \frac{60}{11} \cdot 7 + 24 \rightarrow y = \frac{60}{11}x - \frac{156}{11}$$

5.4. $X_4 = 5, Y_4 = 12$

$$\rightarrow y = \frac{12}{5}x - \frac{12}{5} \cdot 7 + 24 \rightarrow y = \frac{12}{5}x - \frac{36}{5}$$

5.5. $X_5 = 3, Y_5 = 4$

$$\rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} \cdot 7 + 24 \rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{92}{3}$$

Расчет закончен.

Уравнения (12-16) задают направление возможных приращений $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$

Расчет при $n = \text{Const}, m = \text{Var}$ дает результаты представленные в таблице 2.

Полная производная элементов координатного треугольника

В предыдущем разделе был рассмотрен экстремальный случай приращений элементов координатного треугольника, а именно если

1. $n_{\Delta} = \text{Var}$, то $m_{\Delta} = \text{Const}$,

$$2. \quad n_{\Delta} = \text{Const} \quad \text{to} \quad m_{\Delta} = \text{Var}$$

В общем случае оба параметра – переменные. В соответствии с правилом дифференцирования функции двух переменных имеем

$$L = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} \quad (17)$$

где L – полная производная функции.

Для проведения типового расчета используем формулы третьего варианта таблицы 1.

Типовой расчет.

1. (Рис.2, Рис.3)

$$\Delta x_o = n_{\Delta}^2 + 2m_{\Delta}n_{\Delta}$$

$$\Delta y_o = m_{\Delta}^2 + 2m_{\Delta}n_{\Delta}$$

$$\Delta z_o = n_{\Delta}^2 + 2m_{\Delta}n_{\Delta} + 2m_{\Delta}^2$$

$$L = \frac{\partial \Delta y_o}{\partial \Delta x_o} = \frac{\partial \Delta y_o}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial \Delta x_o} + \frac{\partial \Delta y_o}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial \Delta x_o}$$

$$\rightarrow L = \frac{(2m_{\Delta}^2 + 2m_{\Delta}n_{\Delta})'_m}{(n_{\Delta}^2 + 2m_{\Delta}n_{\Delta})'_m} + \frac{(2m_{\Delta}^2 + 2m_{\Delta}n_{\Delta})'_n}{(n_{\Delta}^2 + 2m_{\Delta}n_{\Delta})'_n}$$

$$\rightarrow L = \frac{(n_{\Delta}^2 + 2m_{\Delta}n_{\Delta}) + (2m_{\Delta}^2 + 2m_{\Delta}n_{\Delta})}{n_{\Delta}^2 + n_{\Delta}m_{\Delta}}$$

2.

Запишем уравнение относительно m_{Δ} .

$$m_{\Delta}^2 - \frac{1}{2}(L-4)n_{\Delta}m_{\Delta} - \frac{1}{2}(L-1)n_{\Delta}^2 = 0$$

$$\rightarrow m_{\Delta 1,2} = \frac{n_{\Delta}}{4} \left[(L-4) \pm \sqrt{L^2+8} \right]$$

4. Подставим данное значение $m_{\Delta 1}$ в формулы (12).

4.1.

$$\rightarrow \Delta x_{o1,2} = n_{\Delta}^2 + 2n_{\Delta} \frac{n_{\Delta}}{4} \left[(L-4) \pm \sqrt{L^2+8} \right]$$

$$\rightarrow \Delta x_{o1,2} = \frac{n_{\Delta}^2}{2} \left[(L-2) \pm \sqrt{L^2+8} \right]$$

4.2.

$$\Delta y_{o1,2} = 2m_{\Delta}^2 + 2n_{\Delta}m_{\Delta} = \frac{n_{\Delta}^2}{8} \left[(L-4) \pm \sqrt{L^2+8} \right]^2 + \frac{n_{\Delta}^2}{2} \left[(L-4) \pm \sqrt{L^2+8} \right]$$

$$\rightarrow \Delta y_{o1,2} = \frac{n_{\Delta}^2}{8} \left\{ \left[(L-4) \pm \sqrt{L^2+8} \right]^2 + 4 \left[(L-4) \pm \sqrt{L^2+8} \right] \right\}$$

4.3.

$$\Delta z_{o1,2} = \Delta y_{o1,2} + n_{\Delta}^2$$

$$\rightarrow \Delta z_{o1,2} = \frac{n_{\Delta}^2}{8} \left\{ \left[(L-4) \pm \sqrt{L^2+8} \right]^2 + 4 \left[(L-4) \pm \sqrt{L^2+8} \right] \right\}$$

5. Обратим внимание на то, что для $\Delta X_{0,2}$, $\Delta Y_{0,2}$, $\Delta Z_{0,2}$ имеет место общий множитель $n_{\Delta}^2/8$. Сократив этот множитель и произведя ряд преобразований получим новые значения элементов

$$X_{1,2} = 4 \left[(L-2) \pm \sqrt{L^2+8} \right]$$

$$Y_{1,2} = \left[(L-4) \pm \sqrt{L^2+8} \right]^2 + 4 \left[(L-4) \pm \sqrt{L^2+8} \right]$$

$$Z_{1,2} = \left[(L-4) \pm \sqrt{L^2+8} \right]^2 + 4 \left[(L-4) \pm \sqrt{L^2+8} \right] + 8$$

Здесь элементы с одним индексом имеют один знак при радикалах. Это элементы двух основных пифагоровых треугольников $ПТ_1(x_1, y_1, z_1)$, $ПТ_2(x_2, y_2, z_2)$. Лучи этих ПТ задают направления возможных приращений ΔX_0 , ΔY_0 , ΔZ_0 от точки $M_0(x_0, y_0)$, (см. Рис 2).

На этом типовой расчет закончен. Результаты подобных расчетов для первых четырех вариантов значений ΔX_0 , ΔY_0 , ΔZ_0 таблицы 1 представлены в таблице 2. В таблице 2 указаны восемь пифагоровых треугольников лучи которых и определяют направления возможных приращений ΔX_0 , ΔY_0 , ΔZ_0 в секторе $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. В секторе $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ также будем иметь восемь пифагоровых треугольников. Для определения элементов этих ПТ необходимо в таблице 2 изменить строки X на Y.

Таблица 3.

	1	2
	$\Delta z + \Delta x = 2m^2$ $\Delta z + \Delta y = n^2$	$\Delta z - \Delta x = 2m^2$ $\Delta z - \Delta y = n^2$
ΔX_0	$2mn - n^2$	$n^2 + 2mn$
ΔY_0	$2mn - 2m^2$	$2m^2 + 2mn$
ΔZ_0	$n^2 - 2mn + 2m^2$	$n^2 + 2mn + 2m^2$
L	$-\frac{2(\Delta x_0 + \Delta y_0)}{\Delta z_0 + \Delta x_0 - \Delta y_0}$	$\frac{2(\Delta x_0 + \Delta y_0)}{\Delta z_0 + \Delta x_0 - \Delta y_0}$
X_1	$4 \left[2 - L + \sqrt{L^2 + 8} \right]$	$4 \left[L - 2 + \sqrt{L^2 + 8} \right]$
Y_1	$4 \left[4 - L + \sqrt{L^2 + 8} \right] - \left[4 - L + \sqrt{L^2 + 8} \right]^2$	$4 \left[L - 4 + \sqrt{L^2 + 8} \right] + \left[L - 4 + \sqrt{L^2 + 8} \right]^2$

Z_1	$8-4\left[4-L+\sqrt{L^2+8}\right]+\left[4-L+\sqrt{L^2+8}\right]^2$	$8+4\left[L-4+\sqrt{L^2+8}\right]+\left[L-4+\sqrt{L^2+8}\right]^2$
X_2	$4\left[2-L-\sqrt{L^2+8}\right]$	$4\left[L-2-\sqrt{L^2+8}\right]$
Y_2	$4\left[4-L-\sqrt{L^2+8}\right]-\left[4-L-\sqrt{L^2+8}\right]^2$	$4\left[L-4-\sqrt{L^2+8}\right]+\left[L-4-\sqrt{L^2+8}\right]^2$
Z_2	$8-4\left[4-L-\sqrt{L^2+8}\right]+\left[4-L-\sqrt{L^2+8}\right]^2$	$8+4\left[L-4-\sqrt{L^2+8}\right]+\left[L-4-\sqrt{L^2+8}\right]^2$

Таблица 3 (продолжение)

	3	4
	$\Delta z+\Delta x=2m^2$ $\Delta z-\Delta y=n^2$	$\Delta z-\Delta x=2m^2$ $\Delta z+\Delta y=n^2$
Δx_o	$2mn-n^2$	n^2-2mn
Δy_o	$2m^2-2mn$	$2mn-2m^2$
Δz_o	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$
L	$\frac{2(\Delta x_o - \Delta y_o)}{\Delta x_o + \Delta y_o - \Delta z_o}$	$\frac{2(\Delta y_o - \Delta x_o)}{\Delta z_o + \Delta x_o + \Delta y_o}$
X_1	$4\left[2+L+\sqrt{L^2+8}\right]$	$4\left[2+L+\sqrt{L^2+8}\right]$
Y_1	$\left[(4+L)+\sqrt{L^2+8}\right]^2-4\left[(4+L)+\sqrt{L^2+8}\right]$	$\left[(4+L)+\sqrt{L^2+8}\right]^2-4\left[(4+L)+\sqrt{L^2+8}\right]$

Z_1	$8 + \left[(4+L) + \sqrt{L^2 + 8} \right]^2 - 4 \left[(4+L) + \sqrt{L^2 + 8} \right]$	$8 - \left[(4+L) + \sqrt{L^2 + 8} \right]^2 + 4 \left[(4+L) + \sqrt{L^2 + 8} \right]$
X_2	$4 \left[2 + L - \sqrt{L^2 + 8} \right]$	$4 \left[2 + L - \sqrt{L^2 + 8} \right]$
Y_2	$\left[(4+L) - \sqrt{L^2 + 8} \right]^2 - 4 \left[(4+L) - \sqrt{L^2 + 8} \right]$	$\left[(4+L) - \sqrt{L^2 + 8} \right]^2 - 4 \left[(4+L) - \sqrt{L^2 + 8} \right]$
Z_2	$8 + \left[(4+L) - \sqrt{L^2 + 8} \right]^2 - 4 \left[(4+L) - \sqrt{L^2 + 8} \right]$	$8 - \left[(4+L) - \sqrt{L^2 + 8} \right]^2 + 4 \left[(4+L) - \sqrt{L^2 + 8} \right]$

3. Магистральные направления возможных приращений функции и аргумента

Лучи ПТ(X,Y,Z) определяемые формулами таблицы 3 будем называть

МАГИСТРАЛЬНЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ ПРИРАЩЕНИЙ ФУНКЦИИ И АРГУМЕНТА.

Рассмотрим пример.

Пример 2. В прямоугольной системе координат задана точка M_0 с координатами $x_0=4$, $y_0=3$. Определить магистральные направления бесконечно малых возможных приращений Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 .

Решение.

$$1. z_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

2. При расчете значений L_i в формулах таблицы 3 вместо значений Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 , используем значения $x_0=4$, $y_0=3$, $z_0=5$.

3. Проведем расчет для формул варианта 1 таблицы 3.

$$3.1 \quad L = -\frac{2(x_0 + y_0)}{z_0 + x_0 - y_0} = -\frac{2(4 + 3)}{5 + 4 - 3} = -\frac{7}{3}$$

3.2 Определим значения X_1, Y_1, Z_1 .

$$\rightarrow X_1 = 4 \left[2 - L + \sqrt{L^2 + 8} \right] = 4 \left[2 + \frac{7}{3} + \sqrt{\frac{49}{9} + 8} \right] = 4 \frac{24}{3} = 32$$

$$Y_1 = 4 \left[4 + \frac{7}{3} + \frac{11}{3} \right] - \left[4 + \frac{7}{3} + \frac{11}{3} \right]^2 = 4 \cdot 10 - 100 = -60$$

$$Z_1 = 8 - 40 + 100 = 68$$

Обратим внимание на то, что в значениях X_1, Y_1, Z_1 имеет место общий множитель $k=8$, который можно сократить $\rightarrow X_{11}=8$, $Y_{11} = |-15|$, $Z_{11}=17$

3.3 Определим значения X_2, Y_2, Z_2 .

$$\rightarrow X_2 = 4 \left[2 - L - \sqrt{L^2 + 8} \right] = 4 \left[2 + \frac{7}{3} - \frac{11}{3} \right] = \frac{8}{3} = \frac{24}{9}$$

$$Y_2 = 4 \left[4 + \frac{7}{3} - \frac{11}{3} \right] - \left[4 + \frac{7}{3} - \frac{11}{3} \right]^2 = \frac{32}{3} - \frac{64}{9} = \frac{32}{9}$$

$$Z_2 = \frac{40}{9}$$

Здесь в значениях X_2, Y_2, Z_2 имеется общий множитель $k=8/9 \rightarrow X_{22}=3, Y_{22}=4, Z_{22}=5$
 4. Проведем расчеты, подобные п.п.3, только для всех вариантов таблицы 3 получим результаты, представленные в таблице 4.

Таблица 4.

№ вар.	1	2	3	4
L	-7/3	7/3	1	-1/6
X ₁₁	8	4	3	21
Y ₁₁	-15	3	4	20
Z ₁₁	17	5	5	29
ПТ ₁	(8,15,17)	(4,3,5)	(3,4,5)	(21,20,29)
X ₂₂	3	15	0	-4
Y ₂₂	4	8	-4	-3
Z ₂₂	5	17	4	5
ПТ ₂	(3,4,5)	(15,8,17)	(0,4,4)	(4,3,5)

5. Определим магистральные направления для экстремальных случаев

а) $n=Var, m=Const$

б) $n=Const, m=Var$

Пусть $n=Var, m=Const$

В соответствии с формулами (6) $X_1=2L-1, Y_1=2L(L-1), Z_1=2L(L-1)+1,$

$$L = \frac{\Delta y}{\Delta x + \Delta y - \Delta z}$$

где

При $X_0=4, Y_0=3, Z_0=5$

$$\rightarrow L = \frac{y_0}{x_0 + y_0 - z_0} = \frac{3}{4 + 3 - 5} = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow X_1 = 2L - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$Y_1 = 2 \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = \frac{3}{2}$$

$$Z_1 = Y_1 + 1 = \frac{5}{2}$$

Здесь в значениях X_1, Y_1, Z_1 имеет место общий множитель $k=1/2$, сократив который получим

$X_{11}=4, Y_{11}=3, Z_{11}=5$ т.е. ПТ(4,3,5).

6. Результаты подобного расчета для первых четырех вариантов таблицы 2 представлены в таблице 5. Эти результаты относительно параметра L представлены в таблице 6.

При $X_0=4$, $Y_0=3$, $Z_0=5$ получим значения представленные в таблице 5.

Таблица 5.

№	1	2	3	4
L	$\frac{\Delta y_o}{\Delta x_o + \Delta y_o - \Delta z_o}$	$\frac{\Delta y_o}{\Delta x_o - \Delta y_o + \Delta z_o}$	$\frac{\Delta y_o}{\Delta x_o + \Delta y_o - \Delta z_o}$	$\frac{\Delta y_o}{-\Delta x_o + \Delta y_o + \Delta z_o}$
X ₁	1-2L	2L+1	2L-1	2L-1
Y ₁	2L(1-L)	2L(L+1)	2L(L-1)	2L(L+1)
Z ₁	2L(L-1)+1	2L(L+1)+1	2L(L-1)+1	2L(L+1)+1

Таблица 6

L	3/2	1/2	3/2	3/4
X ₁₁	4	4	4	20
Y ₁₁	3	3	3	21
Z ₁₁	5	5	5	29
ПТ	(4,3,5)	(4,3,5)	(4,3,5)	(20,21,29)

7. При формальном подходе в таблице 5 в качестве L может быть принята и величина обратная т.е. например для варианта 2 в таблице 5 имеем

$$L = \frac{\Delta y_o}{\Delta x_o - \Delta y_o + \Delta z_o} \quad \text{величина ей обратная} \quad L_1 = \frac{1}{L} = \frac{\Delta x_o - \Delta y_o + \Delta z_o}{\Delta y_o}$$

И тогда для варианта 2 будем иметь $X_1=2L_1+1$,

$$Y_1=2L_1(L_1+1),$$

$$Z_1=Y_1+1$$

При $X_0=4$, $Y_0=3$, $Z_0=5$

$$\rightarrow L_1 = \frac{4-3+5}{3} = 2$$

$$\rightarrow X_1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$\rightarrow Y_1 = 2 \cdot 2(2+1) = 12$$

$$\rightarrow Z_1 = 13$$

т.е. получим дополнительный ПТ (5,12,13).

8. В заключении расчетов по примеру 2.

8.1. Исходная точка М(4,3) является вершиной ПТ(4,3,5) с центром в начале координат (Рис.4.3)

8.2. МАГИСТРАЛЬНЫЕ направления бесконечно малых возможных приращений задаются в новой системе координат с центром в точке М₀ лучами основных пифагоровых треугольников (в соответствии с результатами проведенного расчета) представленных в таблице 7.

№	1	2	3	4	5	6
ПТ ₁	(12,5,13)	(5,12,13)	(-12,-5,13)	(-12,-5,13)	(12,-5,13)	(-5,-12,13)
ПТ ₂	(15,8,17)	(8,15,17)	(-15,-8,17)	(-15,-8,17)	(15,-8,17)	(-8,-15,17)
ПТ ₃	(21,20,29)	(20,21,29)	(-21,-20,29)	(-21,-20,29)	(21,-20,29)	(-20,-21,29)
ПТ ₄	(1,0,1)	(0,1,1)	(-1,0,1)	(0,-1,1)	-	-

На этом расчет примера 2 закончен. Обратим внимание на, что в столбце 1 табл.7 имеют место ПТ в полном соответствии с уровнем 2 дерева основных ПТ.

Пример 3. Задана точка М₀ (15,17). Определить МАГИСТРАЛЬНЫЕ направления бесконечно малых возможных приращений функции и аргумента.

Решение.

1. Определим $z_0 = \sqrt{x_0 + y_0} \rightarrow z_0 = \sqrt{15^2 + 17^2} = \sqrt{514} = 22,671568...$

т.е. точка М₀ (15,17) -не рациональная точка.

2. Для дальнейшего расчета необходимо определить РАЦИОНАЛЬНУЮ точку, находящуюся в непосредственной близости к точке М₀.

2.1. $J \quad z_0 - x_0 = 2m_0^2, z_0 - y_0 = n_0^2$

$$\rightarrow m_0^2 = \frac{22,67 \dots - 15}{2} \rightarrow m_0 = 1,958 \dots$$

$$\rightarrow n_0^2 = 22,67 \dots - 17 \rightarrow n_0 = 2,381 \dots$$

2.2 Ограничим значения m_0 и n_0 двумя знаками после запятой $\rightarrow n_1 = 2,38, m_1 = 1,96$

2.3 Определим координаты рациональной точки М₀₁

$$\rightarrow x_{01} = n_1^2 + 2m_1n_1 \rightarrow x_{01} = (2,38)^2 + 2(2,38)(1,96) \rightarrow x_{01} = 14,9940$$

$$y_{01} = 2m_1^2 + 2m_1n_1 \rightarrow y_{01} = 2(1,96)^2 + 2(2,38)(1,96) \rightarrow y_{01} = 17,0128$$

$$z_{01} = y_{01} + n_1^2 \rightarrow z_{01} = 17,0128 + (2,38)^2 \rightarrow z_{01} = 22,6772$$

т.о. получили точку М₀₁(14,9940 ; 17,0128) – это РАЦИОНАЛЬНАЯ точка, т.к. она лежит на луче ПТ(14,9940 ; 17,0128 ; 22,6772). Это не основной ПТ, т.к. в значениях его элементов имеется

$$k = \frac{4}{10^4}$$

общий множитель 10^4 . Разделим значение каждого из элементов на k получим основной - ПТ₁(37485 ; 42532 ; 56693), здесь $x_1 = 37485, y_1 = 42532, z_1 = 56693$

Точка М₀₁ лежит на луче основного ПТ₁. Если каждый из элементов этого ПТ₁ умножим на общий

$$k = \frac{4}{10^4}$$

множитель 10^4 то получим элементы координатного треугольника точки М₀₁.

3. Теперь, имея значения элементов основного ПТ, на луче которого находится точка М₁, проведем первую итерацию, тогда

$$x_{11} = 2z_1 + 2x_1 + y_1$$

$$y_{11} = 2z_1 + x_1 + 2y_1$$

$$z_{11} = 3z_1 + 2x_1 + 2y_1$$

$$\begin{aligned}x_{22} &= 2z_1 - 2x_1 + y_1 \\y_{22} &= 2z_1 - x_1 + 2y_1 \\z_{22} &= 3z_1 - 2x_1 + 2y_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{33} &= 2z_1 + 2x_1 - y_1 \\y_{33} &= 2z_1 + x_1 - 2y_1 \\z_{33} &= 3z_1 + 2x_1 - 2y_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{44} &= |2z_1 - 2x_1 - y_1| \\y_{44} &= |2z_1 - x_1 - 2y_1| \\z_{44} &= 3z_1 - 2x_1 - 2y_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3.1 \quad \rightarrow x_{11} &= 2 \cdot 56693 + 2 \cdot 37485 + 42532 = 230888 \\y_{11} &= 2 \cdot 56693 + 37485 + 2 \cdot 42532 = 235935 \\z_{11} &= 3 \cdot 56693 + 2 \cdot 37485 + 2 \cdot 42532 = 330113\end{aligned}$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} \alpha_{11} = \frac{y_{11}}{x_{11}} = 1,021859, \quad \operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{x_{11}}{y_{11}} = 0,9786085$$

$$\begin{aligned}3.2 \quad x_{22} &= 2z_1 - 2x_1 + y_1 = 80948 \\y_{22} &= 2z_1 - x_1 + 2y_1 = 160965 \\z_{22} &= 3z_1 - 2x_1 + 2y_1 = 180173 \\ \rightarrow \operatorname{tg} \alpha_{22} &= \frac{y_{22}}{x_{22}} = 1,9884987, \quad \operatorname{tg} \alpha_{21} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_{22}} = 0,5028919\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3.3 \quad x_{33} &= 2z_1 + 2x_1 - y_1 = 145824 \\y_{33} &= 2z_1 + x_1 - 2y_1 = 65447 \\z_{33} &= 3z_1 + 2x_1 - 2y_1 = 159985 \\ \rightarrow \operatorname{tg} \alpha_{33} &= \frac{y_{33}}{x_{33}} = 0,4488081, \quad \operatorname{tg} \alpha_{31} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_{33}} = 2,2281237\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3.4 \quad x_{44} &= |2z_1 - 2x_1 - y_1| = 4116 \\y_{44} &= |2z_1 - x_1 - 2y_1| = 9163 \\z_{44} &= 3z_1 - 2x_1 - 2y_1 = 10045 \\ \rightarrow \operatorname{tg} \alpha_{44} &= \frac{y_{44}}{x_{44}} = 2,2261904, \quad \operatorname{tg} \alpha_{41} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_{44}} = 0,4491978\end{aligned}$$

Расчет закончен.

МАГИСТРАЛЬНЫЕ направления бесконечно малых приращений функции и аргумента определяются касательными к исходной точке $M_0(15, 17)$, проведенными под углами $\alpha_{11} \div \alpha_{41}$ к оси X . Для определения общего числа МАГИСТРАЛЬНЫХ направлений необходимо учесть шесть возможных направлений в каждой из четвертей системы координат. $\rightarrow \Sigma = 6 \cdot 4 = 24$.

Итого имеем 24 МАГИСТРАЛЬНЫХ направлений от точки $M_0(x_0, y_0)$.

(Здесь направления по осям координат не учитываются !)

Утверждение 2. «Через произвольную рациональную точку $M_i(x_i, y_i)$ декартовой системы координат можно провести не более 24 касательных, что соответствует числу МАГИСТРАЛЬНЫХ направлений бесконечно малых приращений функции и аргумента».

Или иначе: «Через произвольную рациональную точку $M_i(x_i, y_i)$ может проходить не более **ДВАДЦАТИ ЧЕТЫРЕХ** различных функций вида $y_j = f_j(x)$.»

ВЫВОД

Через любую произвольную точку системы координат может проходить не более 24 графиков различных функций.

Заключение.

Использование системы m n параметров дает возможность рассматривать рациональные точки (точки с рациональными значениями координат) как пункты в которые может переместиться функция, проходящая через исходную точку. Такой подход к понятию производной в части “когда Δx стремится к нулю “ приводит к выводам

1. Система m n параметров задает дискретность возможных приращений координат
2. Минимальные возможные приращения зависят от магистральных направлений исходящих из начальной точки
- 3 Конкретное магистральное направление зависит от функции, проходящей через начальную точку
- 4, Все магистральные направления- лучи, задаваемые направлениями гипотенуз основных пифагоровых треугольников (см. дерево ПТ).

РИСУНКИ

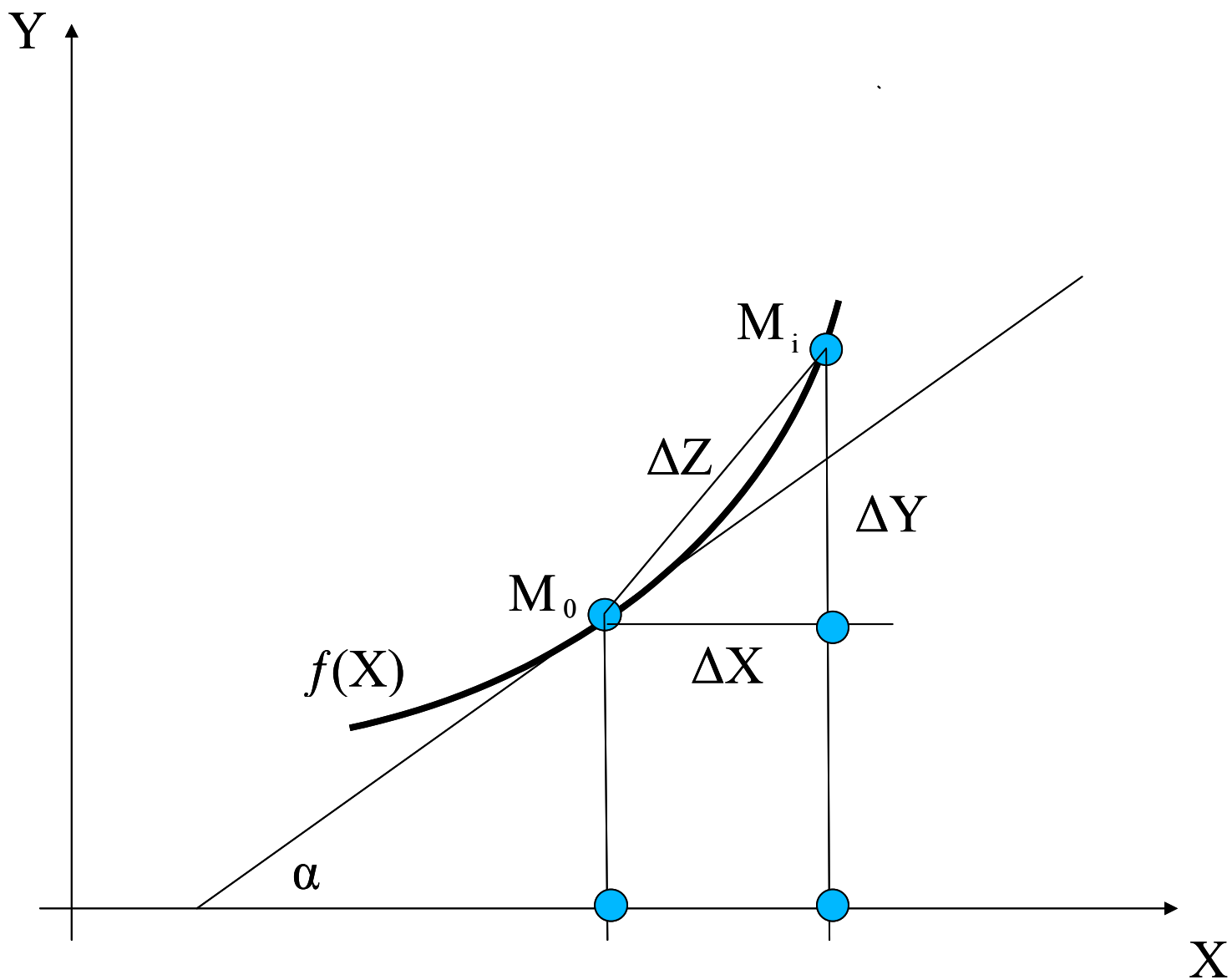


Рис.1 Графическое представление производной

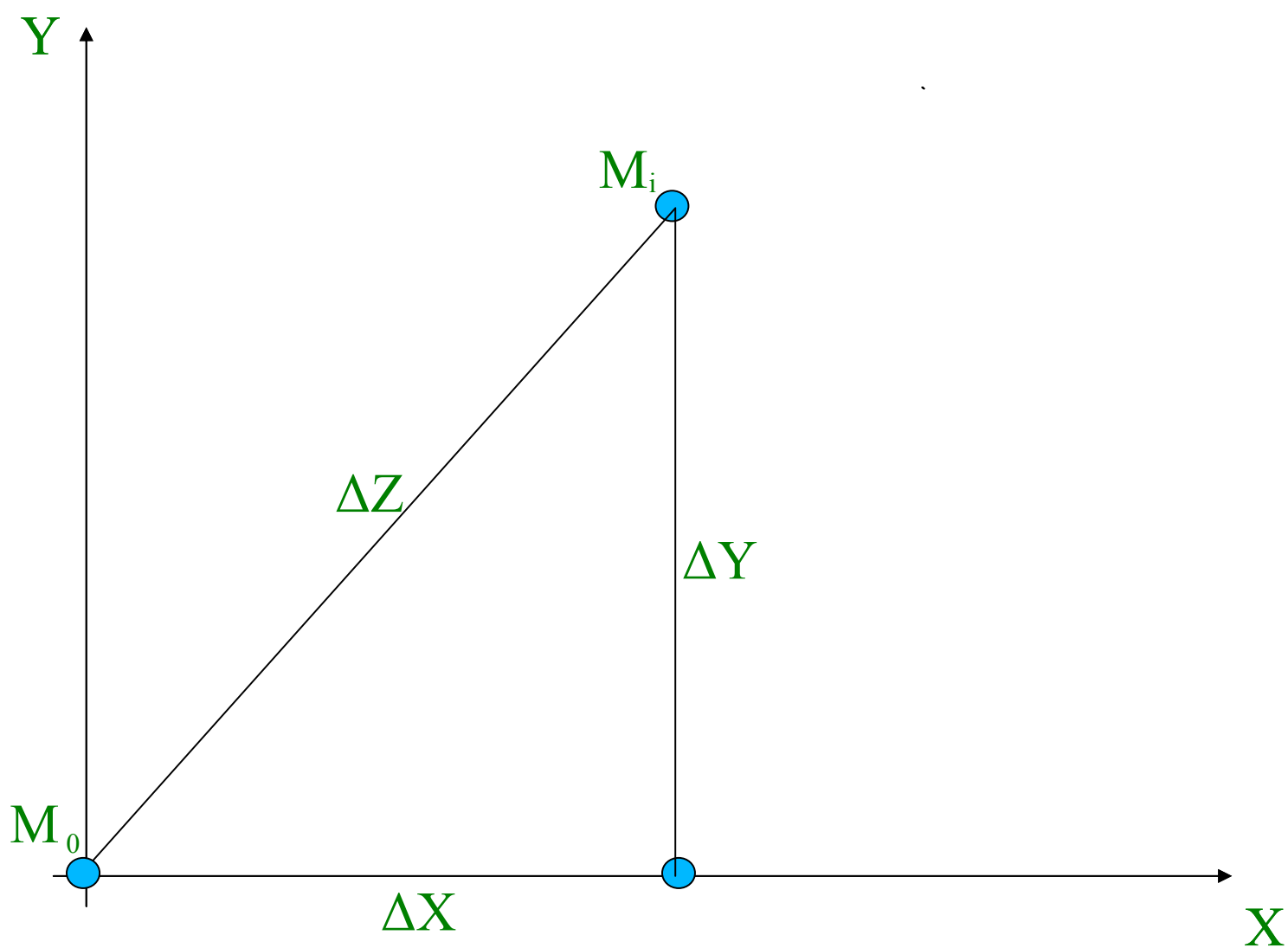


Рис.2 Координатный треугольник приращений

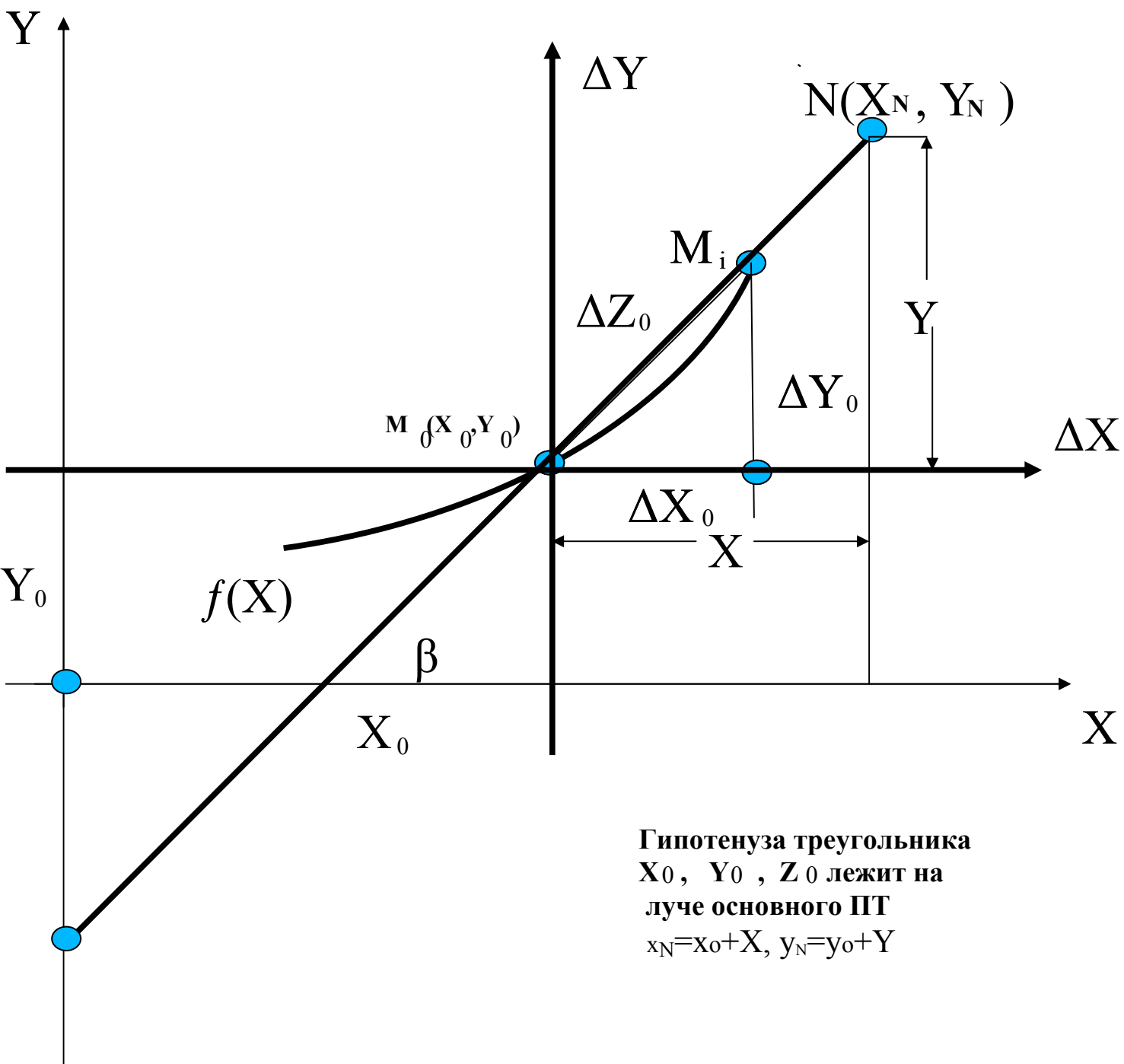


Рис.3 Луч возможного направления приращения координат X_0, Y_0

4.3 Тригонометрия системы mn параметров

Если каждый из элементов основного пифагорова треугольника ПТ(X_0, Y_0, Z_0) умножить на K (где K -любое действительное число), то получим не основной ПТ вида

ПТ($K \cdot X_0, K \cdot Y_0, K \cdot Z_0$). В декартовой системе координат точка $M_j (X_j, Y_j)$ может быть определена с помощью координатного треугольника (X_j, Y_j, Z_j) , где $Z_j = \sqrt{x^2 + Y^2}$

Точка M_j находится на луче исходящим из центра координат под углом α к оси X .

Множество лучей ПТ находится в точном соответствии с множеством ПТ

В таблице 1 представлены восемь вариантов задания параметров mn .

Таблица 1

№	0	1	2	3
	$Z+x=2m^2$ $z+y=n^2$	$z-x=2m^2$ $z-y=n^2$	$z+x=2m^2$ $z-y=n^2$	$z-x=2m^2$ $z+y=n^2$
X_0	$2mn-n^2$	n^2+2mn	$2mn-n^2$	n^2-2mn
Y_0	$2mn-2m^2$	$2m^2+2mn$	$2m^2-2mn$	$2mn-2m^2$
Z_0	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$
№	4	5	6	7
	$z+x=n^2$ $z+y=2m^2$	$z-x=n^2$ $z-y=2m^2$	$z+x=n^2$ $z-y=2m^2$	$z-x=n^2$ $z+y=2m^2$
X_0	$2mn-2m^2$	$2m^2+2mn$	$2mn-2m^2$	$2m^2-2mn$
Y_0	$2mn-n^2$	n^2+2mn	n^2+2mn	$2mn-n^2$
Z_0	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$

→ Пусть $Z + X = 2m^2$, $Z + Y = n^2$

Разделим на Z левую и правую части этих уравнений

$$\rightarrow \frac{2m^2}{Z} = 1 + \cos \alpha \rightarrow \frac{n^2}{Z} = 1 + \sin \alpha$$

$$\rightarrow \frac{n^2}{2m^2} = \frac{1 + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (1)$$

Обозначим
$$f_i = \frac{n^2}{2m^2} \quad (2)$$

Результаты подобных расчетов для первых четырех вариантов значений n^2 и $2m^2$ имеют вид

$$f_{i0} = \frac{1 + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (3)$$

$$f_{i1} = \frac{1 - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \quad (4)$$

$$f_{i2} = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \quad (5)$$

$$f_{i3} = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (6)$$

Для вариантов 4÷7 в формулах 3÷6 следует поменять местами числитель и знаменатель.

В системе mn параметров итерационные формулы имеют вид

$$x_{11} = 2z_0 + 2x_0 + y_0 \quad x_{12} = 2z_0 - 2x_0 + y_0$$

$$E_1 =: y_{11} = 2z_0 + x_0 + 2y_0 \quad E_2 =: y_{12} = 2z_0 - x_0 + 2y_0$$

$$z_{11} = 3z_0 + 2x_0 + 2y_0 \quad z_{12} = 3z_0 - 2x_0 + 2y_0$$

$$x_{13} = 2z_0 + 2x_0 - y_0 \quad x_{14} = |2z_0 - 2x_0 - y_0|$$

$$E_3 =: y_{13} = 2z_0 + x_0 - 2y_0 \quad E_4 =: y_{14} = |2z_0 - x_0 - 2y_0|$$

$$z_{13} = 3z_0 + 2x_0 - 2y_0 \quad z_{14} = 3z_0 - 2x_0 - 2y_0$$

Разделив на Z правые части этих уравнений получим итерационные формулы дерева углов аналогичное дереву ПТ.

$$x_{11} = 2 + 2 \cos \alpha_0 + \sin \alpha_0$$

$$M_1 =: y_{11} = 2 + \cos \alpha_0 + 2 \sin \alpha_0 \quad (7)$$

$$z_{11} = 3 + 2 \cos \alpha_0 + 2 \sin \alpha_0$$

$$\begin{aligned}
 X_{12} &= 2 - 2 \cos \alpha_0 + \sin \alpha_0 \\
 M_2 =: y_{12} &= 2 - \cos \alpha_0 + 2 \sin \alpha_0 & (8) \\
 Z_{12} &= 3 - 2 \cos \alpha_0 + 2 \sin \alpha_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_{13} &= 2 + 2 \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \\
 M_3 =: y_{13} &= 2 + \cos \alpha_0 - 2 \sin \alpha_0 & (9) \\
 Z_{13} &= 3 + 2 \cos \alpha_0 - 2 \sin \alpha_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_{14} &= | 2 - 2 \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 | \\
 M_4 =: y_{14} &= | 2 - \cos \alpha_0 - 2 \sin \alpha_0 | & (10) \\
 Z_{14} &= 3 - 2 \cos \alpha_0 - 2 \sin \alpha_0
 \end{aligned}$$

В результате расчетов по этим формулам имеют место не основные ПТ. Для полного соответствия с деревом ПТ, необходимо правые части уравнений (7)÷(10) умножить на $k = \frac{1}{1 - \cos \alpha}$.

На Рис.1 представлено **дерево рациональных углов** декартовой системы координат, где элементом дерева является угол α_i (в отличии от X, Y, Z дерева ПТ). Здесь исходным значением угла является $\alpha_0 = 36^\circ 42' 12''$. Это угол между Z и X основного ПТ(4, 3, 5). Все остальные углы α_i также определяют лучи местоположений Z_i основных ПТ.

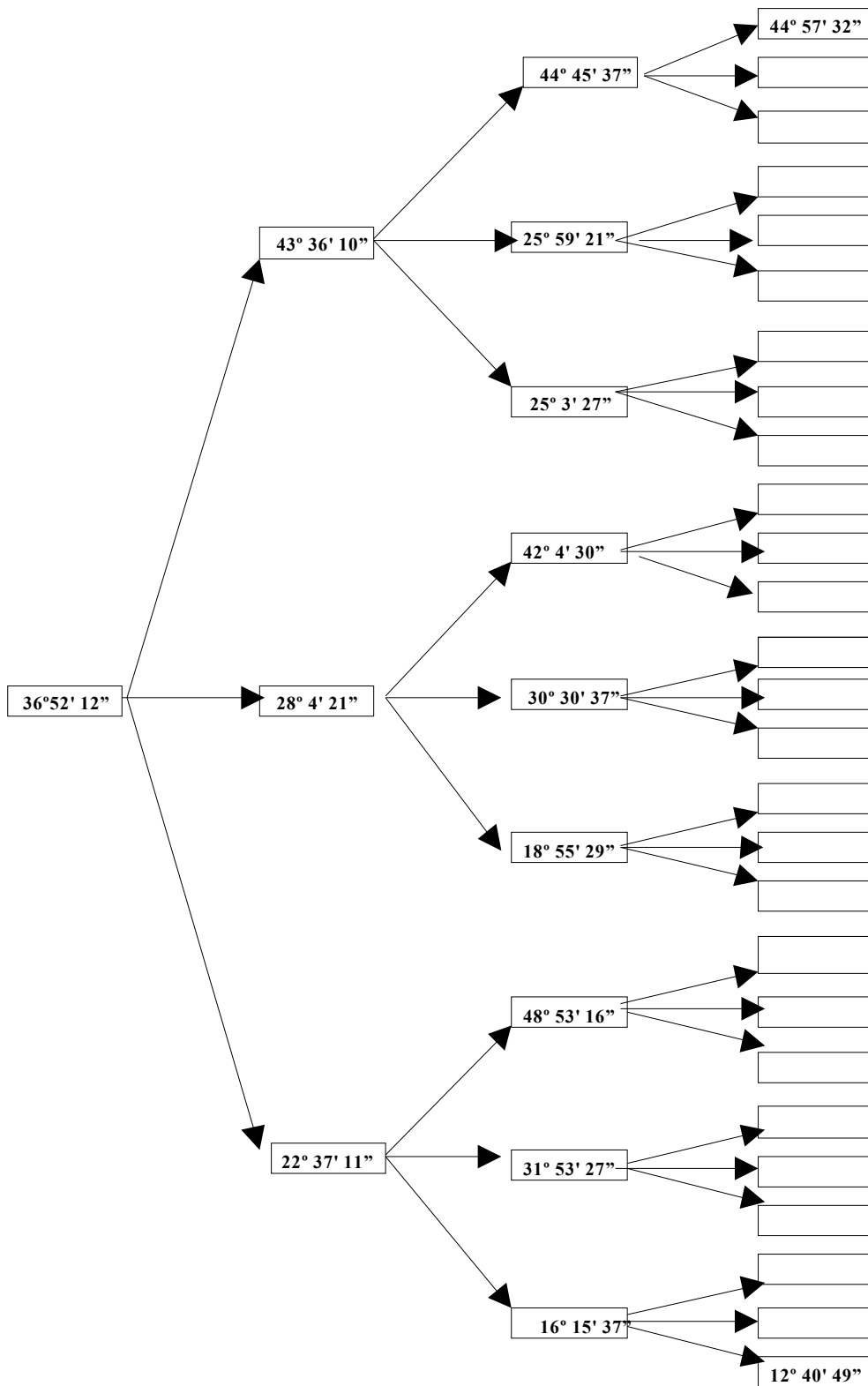


Рис.1 Дерево основных пифагоровых треугольников

Пример 1 Пусть имеем в качестве исходных данных $\text{Sin } \alpha_0 = 0.6$, $\text{Cos } \alpha_0 = 0.8$

Произведем расчет по формулам (7)÷(9) →

$$x_{11} = 2 + 2 \text{Cos } \alpha_0 + \text{Sin } \alpha_0 = 2 + 1.6 + 0.6 = 4.2 \rightarrow \frac{x}{1 - \text{Cos } \alpha} = \frac{4.2}{0.2} = 21$$

$$y_{11} = 2 + \text{Cos } \alpha_0 + 2\text{Sin } \alpha_0 = 2 + 0.8 + 1.2 = 4.0 \rightarrow \frac{y}{1 - \text{Cos } \alpha} = \frac{4.0}{0.2} = 20$$

$$z_{11} = 3 + 2 \text{Cos } \alpha_0 + 2\text{Sin } \alpha_0 = 3 + 1.6 + 1.2 = 5.8 \rightarrow \frac{z}{1 - \text{Cos } \alpha} = \frac{5.8}{0.2} = 29$$

$$x_{12} = 2 - 2 \text{Cos } \alpha_0 + \text{Sin } \alpha_0 = 2 - 1.6 + 0.6 = 1.0 \rightarrow \frac{x}{1 - \text{Cos } \alpha} = \frac{1.0}{0.2} = 5$$

$$y_{12} = 2 - \text{Cos } \alpha_0 + 2\text{Sin } \alpha_0 = 2 - 0.8 + 1.2 = 2.4 \rightarrow \frac{y}{1 - \text{Cos } \alpha} = \frac{2.4}{0.2} = 12$$

$$z_{12} = 3 - 2 \text{Cos } \alpha_0 + 2\text{Sin } \alpha_0 = 3 - 1.6 + 1.2 = 2.6 \rightarrow \frac{z}{1 - \text{Cos } \alpha} = \frac{2.6}{0.2} = 13$$

$$x_{13} = 2 + 2 \text{Cos } \alpha_0 - \text{Sin } \alpha_0 = 2 + 1.6 - 0.6 = 3.0 \rightarrow \frac{x}{1 - \text{Cos } \alpha} = \frac{3.0}{0.2} = 15$$

$$y_{13} = 2 + \text{Cos } \alpha_0 - 2\text{Sin } \alpha_0 = 2 + 0.8 - 1.2 = 1.6 \rightarrow \frac{y}{1 - \text{Cos } \alpha} = \frac{1.6}{0.2} = 8$$

$$z_{13} = 3 + 2 \text{Cos } \alpha_0 - 2\text{Sin } \alpha_0 = 3 + 1.6 - 1.2 = 3.4 \rightarrow \frac{z}{1 - \text{Cos } \alpha} = \frac{3.4}{0.2} = 17.$$

Пример показывает, что формулы (7)÷(9) – это итерационные формулы дерева ПТ, записанные через тригонометрические функции.

fi функции системы mn параметров

Базовой основой тригонометрии системы mn параметров можно считать формулы

$$(3) \div (6). \rightarrow f_i = \frac{n^2}{2m^2}, f_0 = \frac{1 + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, f_1 = \frac{1 - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, f_2 = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, f_3 = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Внимание! fi функции введены и определены автором данной работы.

Сумма

$$f_0 + f_1 = \frac{1 + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$\rightarrow f_0 + f_1 = \frac{1 - \cos \alpha + \sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 1 - \sin \alpha + \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{2(1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha}$$

Аналогично получены и остальные формулы

$$f_0 + f_1 = \frac{2(1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha}$$

$$f_0 + f_2 = \frac{2(1 + \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha}$$

$$f_0 + f_3 = \frac{2}{1 + \cos \alpha}$$

$$f_1 + f_2 = \frac{2}{1 - \cos \alpha}$$

$$f_1 + f_3 = \frac{2(1 - \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha}$$

$$f_2 + f_3 = \frac{2(1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha}$$

$$f_0 + f_1 + f_2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot (3 + \sin \alpha + \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)$$

$$f_0 + f_1 + f_3 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot (3 - \sin \alpha - \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)$$

$$f_0 + f_2 + f_3 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot (3 + \sin \alpha - \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha)$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot (3 - \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha)$$

$$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = \frac{4}{\sin^2 \alpha}$$

Разность

$$f_{i_0} - f_{i_1} = \frac{2(\sin\alpha - \cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$$

$$f_{i_2} - f_{i_0} = \frac{2 \cos\alpha(1 + \sin\alpha)}{\sin^2\alpha}$$

$$f_{i_0} - f_{i_3} = \frac{2 \sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$f_{i_2} - f_{i_1} = \frac{2 \sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$$

$$f_{i_1} - f_{i_3} = \frac{2 \cos\alpha(1 - \sin\alpha)}{\sin^2\alpha}$$

$$f_{i_2} - f_{i_3} = \frac{2(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$$

Произведение

$$f_{i_0} \cdot f_{i_1} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$f_{i_0} \cdot f_{i_2} = \frac{(1 + \sin\alpha)^2}{\sin^2 \alpha}$$

$$f_{i_0} \cdot f_{i_3} = \frac{\cos^2 \alpha}{(1 + \cos\alpha)^2}$$

$$f_{i_1} \cdot f_{i_2} = \frac{\cos^2 \alpha}{(1 - \cos\alpha)^2}$$

$$f_{i_1} \cdot f_{i_3} = \frac{(1 - \sin\alpha)^2}{\sin^2 \alpha}$$

$$f_{i_2} \cdot f_{i_3} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

Деление

$$\frac{f_{i_0}}{f_{i_1}} = \frac{1 + \sin\alpha}{1 + \cos\alpha} \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$$

$$\frac{f_{i_0}}{f_{i_2}} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\frac{f_{i_0}}{f_{i_3}} = \frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}$$

$$\frac{f_{i1}}{f_{i2}} = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

$$\frac{f_{i1}}{f_{i3}} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$\frac{f_{i2}}{f_{i3}} = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$$

Проводя подобные расчеты число \hat{f}_i - функций можно увеличить.

Из рассмотрения и анализа вида \hat{f}_i - функций можно сделать вывод

Вывод Использование формул \hat{f}_i - функций расширяет возможности системы m n параметров

Пример 2 Пусть имеем в качестве исходных данных $\sin \alpha_0 = 0.6$, $\cos \alpha_0 = 0.8$.

Необходимо определить значения ряда основных \hat{f}_i - функций.

Решение

$$f_{i0} = \frac{1 + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, f_{i1} = \frac{1 - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, f_{i2} = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, f_{i3} = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

$$\rightarrow f_{i0} = \frac{1 + 0.6}{1 + 0.8} = 0.88... (8), f_{i1} = \frac{1 - 0.6}{1 - 0.8} = 2, f_{i2} = \frac{1 + 0.6}{1 - 0.8} = 8, f_{i3} = \frac{1 - 0.6}{1 + 0.8} = 0.22... (2)$$

$$f_{i0} + f_{i1} = \frac{2(1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{2(1 - 0.6 \cdot 0.8)}{0.36} = 2.88... (8)$$

$$f_{i0} + f_{i2} = \frac{2(1 + \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{2(1 + 0.6)}{0.36} = 8.88... (8)$$

$$f_{i0} + f_{i3} = \frac{2}{1 + \cos \alpha} = \frac{2}{1.8} = 1.11... (1)$$

$$f_{i1} + f_{i2} = \frac{2}{1 - \cos \alpha} = \frac{2}{0.2} = 10$$

$$f_{i1} + f_{i3} = \frac{2(1 - \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{2(1 - 0.6)}{0.36} = 2.22... (2)$$

$$f_{i2} + f_{i3} = \frac{2(1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{2(1 + 0.6 \cdot 0.8)}{0.36} = 8.22... (2)$$

$$f_{i_0} + f_{i_1} + f_{i_2} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot (3 + \sin \alpha + \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = \frac{3.92}{0.36} = 10.88... \quad (8)$$

$$f_{i_0} + f_{i_1} + f_{i_3} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot (3 - \sin \alpha - \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = \frac{3.92}{0.36} = 3.11... \quad (1)$$

$$f_{i_0} + f_{i_2} + f_{i_3} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot (3 + \sin \alpha - \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = \frac{3.28}{0.36} = 9.11... \quad (1)$$

$$f_{i_1} + f_{i_2} + f_{i_3} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot (3 - \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = \frac{3.68}{0.36} = 10.22... \quad (2)$$

$$f_{i_0} + f_{i_1} + f_{i_2} + f_{i_3} = \frac{4}{\sin^2 \alpha} = \frac{4}{0.36} = 11.11... \quad (1).$$

4.4 Степенной многочлен в системе m n параметров.

1. Рассмотрим функцию $y = ax^2 + bx + c$ (1)

В зависимости от выбранных значений m n формулы для x могут иметь восемь вариантов представлений.

Вариант 1

Пусть

$$x = n^2 + 2mn$$

$$\rightarrow y = a(n^2 + 2mn)^2 + b(n^2 + 2mn) + c$$

$$\rightarrow y = (an^4 + bn^2 + c) + a(2mn)^2 + (2an^2 + b)(2mn)$$

Обратим внимание на то, что здесь первое слагаемое имеет вид исходной функции, если считать, что $x = n^2$.

Допустим, что $x = n^2$ тогда получим

$$y - (ax^2 + bx + c) = a(2mn)^2 + (2ax + b)(2mn)$$

$$\rightarrow a(2mn)^2 + (2ax + b)(2mn) = 0$$

откуда $(2mn)_1 = 0$, т.е. мы подтвердили принятое ранее допущение

$$x = n^2 + 2mn \text{ при } (2mn)_1 = 0 \rightarrow x = n^2$$

Имеем

$$a(2mn) = -(2ax + b)$$

$$\rightarrow (mn)_2 = \frac{-(2ax + b)}{2a}$$

Обратим внимание на то, что $y' = (2ax + b)$, $y'' = 2a$

где y' - первая производная по x от исходной функции,

y'' - соответственно 2-ая производная.

$$\rightarrow (mn)_2 = -\frac{y'}{y''} \quad \rightarrow x = \frac{-a(2mn) - b}{2a} \quad (7)$$

Подставим это значение x в исходное уравнение (1) и приравняем нулю

$$\rightarrow a \left[\frac{a(2mn) + b}{2a} \right]^2 - b \left[\frac{a(2mn) + b}{2a} \right] + c = 0$$

$$\rightarrow (2mn)^2 = \frac{1}{a^2} (b^2 - 4ac) \quad (8)$$

Если квадратное уравнение решить обычным способом, то получим

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} \quad (9)$$

$$\text{Из (8) и (9) следует, что } (2mn)^2 = (x_1 - x_2)^2 \quad (10)$$

где x_1, x_2 - корни исходного уравнения.

На основании результатов проведенного расчета можно сделать следующее утверждение

Утверждение 1. Для квадратного уравнения вида $y = ax^2 + bx + c$ справедливо равенство

$$(2mn)^2 = (x_1 - x_2)^2 = \left(\frac{y'}{y''} \right)^2,$$

где

- $(2mn)$ - параметр системы,
- x_1, x_2 - корни уравнения ,
- y', y'' - производные по x .

Рассмотрим функцию

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (11)$$

$$J \rightarrow x = n^2 + 2mn$$

$$\rightarrow y = a(n^2 + 2mn)^3 + b(n^2 + 2mn)^2 + c(n^2 + 2mn) + d$$

Откуда, аналогично расчетам п.1, получим

$$\begin{aligned} a(2mn)^3 + (3ax + b)(2mn)^2 + (3ax^2 + 2bx + c)(2mn) &= 0 \\ \rightarrow a(2mn)^2 + (3ax + b)(2mn) + 3ax^2 + 2bx + c &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Легко проверить, что вместо этого уравнения можно записать

$$\frac{y'''}{3!}(2mn)^2 + \frac{y''}{2!}(2mn) + \frac{y'}{1!} = 0 \quad (13)$$

Для функции

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \ell \quad \text{аналогично получим}$$

$$\frac{y^{(4)}}{24}(2mn)^3 + \frac{y'''}{6}(2mn)^2 + \frac{y''}{2}(2mn) + \frac{y'}{1}(2mn)^0 = 0 \quad (14)$$

Из анализа полученных формул следует

Утверждение 2. Для функции вида $y = ax^k + bx^{k-1} + \dots + N$ справедливо уравнение

$$\frac{y^{(k)}}{k!}(2mn)^{k-1} + \frac{y^{(k-1)}}{(k-1)!}(2mn)^{(k-2)} + \dots + \frac{y'}{1!}(2mn)^0 = 0 \quad (15)$$

- где - $y^{(k)}$ k -ая производная исходной функции,
- $y^{(k-1)}$ -ая производная,
 - $y^{(k-i)}$ -ая производная,
 - $(2mn)$ -параметр системы m, n .

Следует сказать, что формула (15) обладая внешним сходством с известной формулой Тейлора (см. любой справочник по математике), имеет в сравнении с ней следующие существенные отличия:

1. В формуле Тейлора имеет место $f^{(i)}(a)$ где a - конкретное значение переменной, т.е. $f^{(i)}(a)$ конкретное число, не содержащее переменной x .

В формуле (15) $y^{(i)}$ может содержать переменную x .

2. В ряде Тейлора имеет место при слагаемых множитель вида $(x-a)^i$ т.е. содержится только одна переменная x . В формуле (15) имеют место две переменные.

3. В частном случае параметр $(2mn)^2 = (x_i - x_{i+1})^2$ где x_i, x_{i+1} -любая пара корней исходного уравнения. (16)

При этом число $(2mn)_i^2$ равно числу сочетаний из n элементов (n -число корней исходного уравнения) по m .

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{2(n-2)!} \quad (17)$$

Рассмотрим пример.

Пример 1 Пусть имеем уравнение $f(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$ Покажем, что параметр $(2mn)^2$ равен $(x_i - x_{i+1})^2$. Из исходного уравнения $\rightarrow y' = 3x^2 - 16x + 17 \rightarrow y'' = 6x - 16 \rightarrow y''' = 6$ Тогда, на основании формулы (15)

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{y'''}{3!}(2mn)^2 + \frac{y''}{2!}(2mn) + \frac{y'}{1!}(2mn)^0 &= 0 \\ \rightarrow \frac{6}{3!}(2mn)^2 + \frac{6x-16}{2!}(2mn) + \frac{3x^2-16x+17}{1!} &= 0 \\ \rightarrow (2mn)^2 + (3x-8)(2mn) + (3x^2-16x+17) &= 0 \end{aligned}$$

В данном примере нам известно, что исходное уравнение имеет три корня $x_1=1, x_2=2, x_3=5$

a) $Jx=1$, тогда из уравнения (12)

$$\begin{aligned} \rightarrow (2mn)^2 - 5(2mn) + 4 = 0 \rightarrow (2mn)_{1,2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \rightarrow (2mn)_1 = 4 \\ \rightarrow (2mn)_2 = 1 \text{ заметим, что } (2mn)_1 &= x_3 - x_1 = 5 - 1 = 4 \quad (2mn)_2 = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

b) $Jx=2$, тогда из уравнения (12)

$$\begin{aligned} \rightarrow (2mn)^2 - 2(2mn) - 3 = 0 \rightarrow (2mn)_{3,4} &= 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \rightarrow (2mn)_3 = 3 \\ \rightarrow (2mn)_4 = -1 \text{ заметим, что } (2mn)_3 &= x_3 - x_2 = 5 - 2 = 3 \quad (2mn)_4 = x_1 - x_2 = 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

c) $Jx=5$, тогда из уравнения (12)

$$\begin{aligned} \rightarrow (2mn)^2 + 7(2mn) + 12 = 0 \rightarrow (2mn)_{5,6} &= \frac{1}{2}(-7 \pm \sqrt{49-48}) \rightarrow (2mn)_5 = -3 \\ \rightarrow (2mn)_6 = -4 \text{ заметим, что } (2mn)_5 &= x_2 - x_3 = 2 - 5 = -3, \quad (2mn)_6 = x_1 - x_3 = 1 - 5 = -4 \end{aligned}$$

Из данного примера видно, что параметр $(2mn)$ - это разность любой пары из трех корней

$$\text{исходного уравнения} \rightarrow C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{3!}{2(3-2)!} = 3 \rightarrow \sum (2mn)^2_i = C^3_2 = 3.$$

Вариант 2

Пусть $x = n^2 - 2mn$, тогда из уравнения (1)

$$\begin{aligned} \rightarrow y &= a(n^2 - 2mn)^2 + b(n^2 - 2mn) + c \\ \rightarrow y &= (an^4 + bn^2 + c) + a(2mn)^2 - (2an^2 + b)(2mn) \end{aligned}$$

Произведя расчеты получим аналогичные результаты (см. вариант 1).

2. Определение вида кривых второго порядка.

При рассмотрении степенных многочленов часто приходится иметь дело с кривыми второго порядка. Так, для уравнения $y = ax^2 + bx + c$ путем замены $x = n^2 + 2mn, y = 2m^2 + 2mn$ получим

$$2m^2 + 2mn - an^2 - a2mn - b = 0 \quad (18)$$

Для уравнения $y = ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$ на основании уравнения (4)

$$a(2mn) = -(2ax + b) \quad (19)$$

Для уравнения

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow a(2mn)^2 + 3ax(2mn) + 3ax^2 + b(2mn) + c = 0 \quad (20)$$

Для определения вида кривых второго порядка используем инварианты [*]. Общее уравнение кривых второго порядка имеет вид

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (21)$$

Инварианты для этого уравнения имеют вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 \rightarrow S = a + c \quad (22)$$

Определение вида кривой производится по данным таблицы 1. Рассмотрим уравнение (18). Здесь имеет место две переменных m и n . В типовом уравнении (21) также имеют место две переменных. Сравнивая коэффициенты при переменных для уравнения (18) и (22) заполним инварианты и вычислим их, тогда для уравнения (18) получим

$$\Delta = 2b(3a-2), \quad \delta = 2a-4(1-a)^2, \quad S = 2+a \quad (23)$$

где a и b – коэффициенты уравнения прямой

Аналогично, для уравнения (21) получим

$$\Delta = \frac{a}{4}(3ac - b^2), \quad \delta = \frac{3}{4}a^2, \quad S = 4a, \quad \Delta \cdot S = a^2(3ac - b^2) \quad (24)$$

где a, b, c – коэффициенты уравнения $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Уравнение (19) мы не рассматриваем, т.к. это обычное уравнение. Анализ выражений (23) и (24) показывает, что если исходное уравнение – прямая, то уравнение (23), в координатной системе m, n имеет вид гиперболы.

Пример 2. Пусть имеем уравнение

$$y = -\frac{5}{12}x + 10, \rightarrow a = -\frac{5}{12}, \rightarrow b = 10$$

На основании выражений (22)

$$\Delta = 2b(3a - 2) = -65, \quad \delta = -6,84 \quad S = 0,75$$

т.о. на основании таблицы 1 имеем гиперболу.

Пример 3. Пусть имеем уравнение

$$x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = 0 \rightarrow a = 1, \rightarrow b = -2, \rightarrow c = -6, \rightarrow d = 4$$

тогда, на основании выражений (22)

$$\Delta = \frac{a}{4}(3ac - b^2) = -5,5 \quad \delta = \frac{3}{4}a^2 = \frac{3}{4}$$

$$S = 4 \quad \Delta \cdot S = -22$$

На основании таблицы 1 имеем действительный эллипс.

Таблица 1.

Центральные кривые	$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	$\Delta \cdot S < 0$	Действительный эллипс	
			$\Delta \cdot S > 0$	Мнимый эллипс	
	$\delta \neq 0$		$\Delta = 0$	Пара мнимых прямых	
			$\Delta \neq 0$	Гипербола	
			$\Delta = 0$	Пара пересекающихся прямых	
	$\delta < 0$				

3. Эллипс допустимых значений нулей кубического многочлена.

Пусть имеем уравнение

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (25)$$

тогда $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$ $f'''(x) = 6a$

Применив формулу (15) к уравнению (25) получим

$$a(2mn)^2 + (3ax + b)(2mn) + 3ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (26)$$

Если все три корня уравнения (25) будут действительными, то уравнение (26) – эллипс в координатах $x_1(2mn)$. **Задача заключается в том, чтобы определить этот эллипс.** Для решения этой задачи необходимо определить координаты ряда точек. На рис. 1 представлен типовой эллипс и его характерные точки 1-12. В уравнении (26) будем считать в качестве переменных x и $(2mn)$. Поэтому его полное исследование должно предусматривать:

-решение относительно x , считая $(2mn) = \text{Const}$,

-решение относительно $(2mn)$, считая $x = \text{Const}$,

-определение экстремальных значений функции относительно x и $(2mn)$.

1. Решая уравнение (26) относительно x получим

$$x_{1,2} = \frac{1}{6a} \left[-(2b + 3a(2mn)) \pm \sqrt{4b^2 - 3a^2(2mn)^2 - 12ac} \right]$$

Подставляя любое из данных значений x в уравнение (25), после простых, но громоздких преобразований в итоге получим:

$$a^6(2mn)^6 + 2a^4(3ac - b^2)(2mn)^4 + a^2(3ac - b^2)^2(2mn)^2 + \frac{4(3ac - b^2)^3 + (2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2}{27} = 0$$

Это уравнение устанавливает связь переменной $(2mn)$ с коэффициентами кубического уравнения и является кубическим относительно $(2mn)^2$.

Утверждение 3 Для уравнения вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ справедливы уравнения

$$az^2 + (3ax + b)z + 3ax^2 + 2bx + c = 0, \\ a^6z^6 + 2a^4(3ac - b^2)z^4 + a^2(2ac - b^2)^2z^2 + \frac{1}{27}[4(3ac - b^2)^3 + (2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2]$$

где z_i^2 - квадрат разности любой пары корней x_i, x_{i+1} исходного уравнения.

1. Решая уравнение(26)относительно $(2mn)$ будем иметь

$$(2mn)_{1,2} = \frac{1}{2a} \left[-(3ax + b) \pm \sqrt{b^2 - 3a^2x^2 - 2abx - 4ac} \right] \quad (27)$$

2. Продифференцируем уравнение (26) по x и приравняем нулю.

$$\rightarrow 3a(2mn) + 6ax + 2b = 0 \rightarrow (2mn) = -\frac{6ax + 2b}{3a}$$

Подставив это значение $(2mn)$ в уравнение (26), получим

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{3a} \left[-b \pm \sqrt{3(b^2 - 3ac)} \right] \quad (28)$$

Подставим это значение $x_{1,2}$ в (27)

$$\rightarrow (2mn)_1 = -\frac{2\sqrt{3(b^2 - 3ac)}}{3a} \rightarrow (2mn)_2 = -\frac{\sqrt{3(b^2 - 3ac)}}{3a}, \text{ если } \rightarrow x = x_1$$

$$\rightarrow (2mn)_1 = \frac{2\sqrt{3(b^2 - 3ac)}}{3a} \rightarrow (2mn)_2 = \frac{\sqrt{3(b^2 - 3ac)}}{3a}, \text{ если } \rightarrow x = x_2$$

3. Продифференцируем уравнение (26) по $(2mn)$ и приравняем нулю.

$$\rightarrow 2a(2mn) + 3ax + b = 0 \rightarrow (2mn) = -\frac{3ax + b}{2a}$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{3a} (-b \pm 2\sqrt{b^2 - 3ac}) \rightarrow (2mn)_{1,2} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{b^2 - 3ac}$$

$$3ax^2 + 2bx + c = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{3a} \left[-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac} \right]$$

4. J

Подставим это значение x в уравнение (26)

$$\rightarrow a(2mn)^2 + (3ax + b)(2mn) = 0 \rightarrow (2mn)_1 = 0 \rightarrow (2mn)_2 = -\frac{3ax + b}{a}$$

Результаты расчетов (п.п. 2-5) представлены в таблице 2. На Рис.1 представлен эллипс построенный для уравнения

$$x^3 - 2x^2 - 6x + d = 0 \rightarrow \text{где } a = 1 \rightarrow b = -2 \rightarrow c = -6$$

Из анализа данных таблицы 2, уравнения (25) и рассмотрения Рис.1 можно сделать следующее утверждение:

Утверждение 4. Для уравнения вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ если все три корня x_1, x_2, x_3 являются действительными, то все они находятся в области

$$\frac{1}{3a}[-b + 2\sqrt{b^2 - 3ac}] \geq x_i \geq \frac{1}{3a}[-b - 2\sqrt{b^2 - 3ac}] \quad (29)$$

где $i=1,2,3$ при этом значение d будет находиться в пределах

$$-\frac{1}{27a}[-2b^3 + 9abc - (6ac - 2b^2)\sqrt{b^2 - 3ac}] \geq d_i \geq -\frac{1}{27a}[-2b^3 + 9abc + (6ac - 2b^2)\sqrt{b^2 - 3ac}] \quad (30)$$

а корни в областях

$$\frac{1}{3a}[-b - 2\sqrt{b^2 - 3ac}] \leq x_{\min} \leq \frac{1}{3a}[-b - \sqrt{b^2 - 3ac}] \quad (31)$$

$$\frac{1}{3a}[-b - \sqrt{b^2 - 3ac}] \leq x_{\text{сред}} \leq \frac{1}{3a}[-b + \sqrt{b^2 - 3ac}] \quad (32)$$

$$\frac{1}{3a}[-b + \sqrt{b^2 - 3ac}] \leq x_{\max} \leq \frac{1}{3a}[-b + 2\sqrt{b^2 - 3ac}] \quad (33)$$

Уравнения (29)-(33) получены с помощью системы m, n параметров и определяют зависимости между корнями кубического уравнения и его коэффициентами. При этом **появляется возможность указать область возможных значений корней при определенных вариациях свободного члена исходного уравнения при условии, что коэффициенты при x остаются постоянными**. На основе данных таблицы 6.3 можно определить значения d_i и

x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}

Таблица 2

№.№ точек на Рис.4.2	X	$(2mn)_1$	$(2mn)_2$
1	$\frac{1}{3a}[-b - 2\sqrt{b^2 - 3ac}]$	$\frac{1}{a}\sqrt{b^2 - 3ac}$	$\frac{1}{a}\sqrt{b^2 - 3ac}$
2, 12	$\frac{1}{3a}[-b - \sqrt{3(b^2 - 3ac)}]$	$\frac{2}{3a}\sqrt{3(b^2 - 3ac)}$	$\frac{1}{3a}\sqrt{3(b^2 - 3ac)}$
3, 11	$\frac{1}{3a}[-b - \sqrt{b^2 - 3ac}]$	$\frac{1}{a}\sqrt{b^2 - 3ac}$	0
4, 10	$-\frac{b}{3a}$	$\frac{1}{3a}\sqrt{3(b^2 - 3ac)}$	$-\frac{1}{3a}\sqrt{3(b^2 - 3ac)}$
5, 9	$\frac{1}{3a}[-b + \sqrt{b^2 - 3ac}]$	0	$-\frac{1}{a}\sqrt{b^2 - 3ac}$
6, 8	$\frac{1}{3a}[-b + \sqrt{3(b^2 - 3ac)}]$	$-\frac{1}{3a}\sqrt{3(b^2 - 3ac)}$	$-\frac{2}{3a}\sqrt{3(b^2 - 3ac)}$
7	$\frac{1}{3a}[-b + 2\sqrt{b^2 - 3ac}]$	$-\frac{1}{a}\sqrt{b^2 - 3ac}$	$-\frac{1}{a}\sqrt{b^2 - 3ac}$

Проведем типовой расчет. Для точки 1 табл.2

$$x_1 = \frac{1}{3}[-b - 2\sqrt{b^2 - 3c}] \quad (\text{здесь и далее } a=1).$$

1. Разделив исходное уравнение $x^3+bx^2+cx+d=0$ на $(x-x_1)$ получим

$$x^2 + \frac{2}{3}(b - \sqrt{b^2 - 3c})x - \frac{1}{9}(-2b^2 + 2b\sqrt{b^2 - 3c} + 3c) = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{3}(-b + \sqrt{b^2 - 3c})$$

2. Имея значения трех корней, определим d_1

$$d_1 = -x_1 \cdot x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{27}(b + 2\sqrt{b^2 - 3c})(\sqrt{b^2 - 3c} - b)^2$$

Проведя подобные расчеты для всех значений x_i таблицы 2 получим данные, представленные в таблице 3.

Таблица 3

№ п.п	x_1	x_2	x_3	d
1	$\frac{1}{3}(-b - 2\sqrt{b^2 - 3c})$	$\frac{1}{3}(-b + \sqrt{b^2 - 3c})$	$\frac{1}{3}(-b + \sqrt{b^2 - 3c})$	$-\frac{1}{27}(b + 2\sqrt{b^2 - 3c})(\sqrt{b^2 - 3c} - b)^2$
2	$\frac{1}{3}(-b - \sqrt{3(b^2 - 3c)})$	$\frac{1}{3}(-b + \sqrt{3(b^2 - 3c)})$	$-\frac{b}{3}$	$\frac{b}{27}(2b^2 - 9c)$
3	$\frac{1}{3}(-b - \sqrt{b^2 - 3c})$	$\frac{1}{3}(2\sqrt{b^2 - 3c} - b)$	$\frac{1}{3}(-b - \sqrt{b^2 - 3c})$	$-\frac{1}{27}(2\sqrt{b^2 - 3c} - b)(b + \sqrt{b^2 - 3c})^2$
4	$-\frac{b}{3}$	$\frac{1}{3}(-b - \sqrt{3(b^2 - 3c)})$	$\frac{1}{3}(-b + \sqrt{3(b^2 - 3c)})$	$\frac{b}{27}(2b^2 - 9c)$
5	$\frac{1}{3}(-b + \sqrt{b^2 - 3c})$	$\frac{1}{3}(-b + \sqrt{b^2 - 3c})$	$\frac{1}{3}(-b - 2\sqrt{b^2 - 3c})$	$-\frac{1}{27}(b + 2\sqrt{b^2 - 3c})(\sqrt{b^2 - 3c} - b)^2$
6	$\frac{1}{3}(-b + \sqrt{3(b^2 - 3c)})$	$-\frac{b}{3}$	$\frac{1}{3}(-b - \sqrt{3(b^2 - 3c)})$	$\frac{b}{27}(2b^2 - 9c)$
7	$\frac{1}{3}(-b + 2\sqrt{b^2 - 3c})$	$\frac{1}{3}(-b - \sqrt{b^2 - 3c})$	$\frac{1}{3}(-b - \sqrt{b^2 - 3c})$	$-\frac{1}{27}(2\sqrt{b^2 - 3c} - b)(b + \sqrt{b^2 - 3c})^2$

Из этой таблицы видно, что значения для x_i и d_i совпадают между собой в строках 1и5, 2,4 и 6, 3 и 7.

Методика построения эллипса

Задано исходное уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$, где a, b, c -определенные коэффициенты. Необходимо построить эллипс допустимых действительных значений корней исходного уравнения при вариациях свободного члена d .

1. Для заданных значений a, b, c по формулам таблицы 2 производим расчет значений $x_1, (2mn)_1, (2mn)_2$ для всех 12 точек эллипса.
2. В координатной системе $x_1, (2mn)$ фиксируем местоположение этих 12 точек.
3. Проведя плавную кривую через эти точки получим эллипс допустимых действительных значений корней кубического уравнения $\rightarrow (2mn) = \Psi(x_1)$.

Пример 4.

Дано уравнение $x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = 0$. Необходимо построить эллипс допустимых значений корней используя систему mn параметров.

Решение

Из исходного уравнения $a=1, b=-11, c=31, d=-21$.

1. Определим значение $x_1 = \frac{1}{3a}(-b - 2\sqrt{b^2 - 3ac})$ (см. точка 1 таблицы 2)
 $\rightarrow x_1 = \frac{1}{3}(11 - 2\sqrt{11^2 - 93}) = 0.139$

2. В соответствии с уравнением (26)

$$(2mn)_{1,2} = \frac{1}{2a} \left[-(3ax_1 + b) \pm \sqrt{b^2 - 3a^2x_1^2 - 2abx_1 - 4ac} \right] \rightarrow$$

$$(2mn)_{1,2} = \frac{1}{2a} \left[-(0.417 - 11) \pm \sqrt{11^2 - 0.058 + 3.058 - 124} \right] = 5.29$$

3. Из выражений строки 1 таблицы 3

$$\rightarrow x_2 = x_3 = \frac{1}{3a}(-b + \sqrt{b^2 - 3ac}) \rightarrow x_2 = x_3 = \frac{1}{3}(11 + \sqrt{11^2 - 93}) = 5.43$$

4. Определим значение $d_1 \rightarrow d_1 = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -0.139 \cdot 5.43 \cdot 5.43 = -4.1$

Результаты подобных расчетов для всех 12 точек таблицы 2 представлены в таблице 4.

Таблица 4

№ точки	1	2	3	4	5	6
X_1	0.139	0.61	1.90	3.67	5.43	6.72
$(2mn)_1$	5.29	6.11	5.29	3.05	0	-3.05
$(2mn)_2$	5.29	3.05	0	-3.05	-5.29	-6.11
X_2	5.43	6.72	7.19	6.72	5.43	3.67
X_3	5.43	3.67	1.90	0.61	0.139	0.61
d	-4.10	-15.04	-25.90	-15.04	-4.10	-15.04
№ точки	7	8	9	10	11	12
X_1	7.19	6.72	5.43	3.67	1.9	0.61
$(2mn)_1$	-5.29	-3.05	0	3.05	5.29	6.11
$(2mn)_2$	-5.29	-6.11	-5.29	-3.05	0	3.05
X_2	1.90	3.67	5.43	6.72	7.19	6.72
X_3	1.90	0.61	0.139	0.61	1.90	3.67
d	-3.07	-15.04	-4.10	-15.04	-25.90	-15.04

Эллипс построенный по точкам таблицы 4 представлен на Рис.1.

$$X^3 - 11X^2 + 31X + d = 0 \rightarrow a=1, b=-11, c=31$$

$$(2mn)^2 + (3X + b)(2mn) + 3X^2 + 2bX + c = 0$$

$$\rightarrow (2mn)^2 + (3X - 11)(2mn) + 3X^2 - 22X + 31 = 0$$

$$\rightarrow (2mn)_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(11 - 3X) \pm \sqrt{(11 - 3X)^2 - 4(3X^2 - 22X + 31)} \right]$$

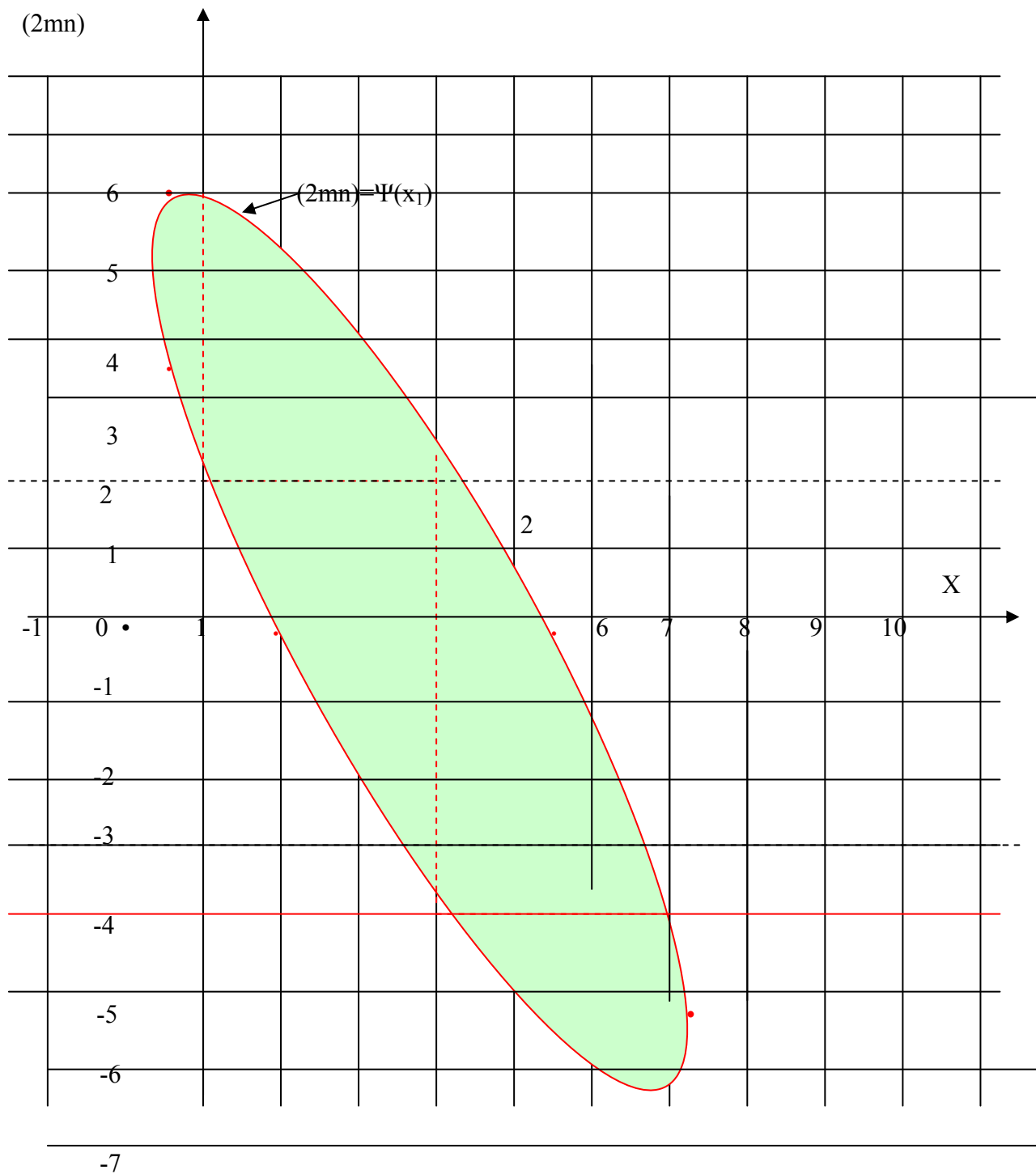


Рис. 1 Эллипс допустимых значений корней уравнения $x^3 - 11x^2 + 31x + d = 0$.

На Рис.2 представлен эллипс допустимых значений корней уравнения $x^3 - 2x^2 - 6x + d = 0$.

$$\begin{aligned}
 X^3 - 2X^2 - 6X + d = 0 &\rightarrow a=1, b=-2, c=-6 \\
 (2mn)^2 + (3X+b)(2mn) + 3X^2 + 2bX + c = 0 \\
 \rightarrow (2mn)^2 + (3X-2)(2mn) + 3X^2 - 4X - 6 = 0 \\
 \rightarrow (2mn)_{1,2} = \frac{1}{2} [(3X-2) \pm \sqrt{(2-3X)^2 - 4(3X^2 - 4X - 6)}]
 \end{aligned}$$

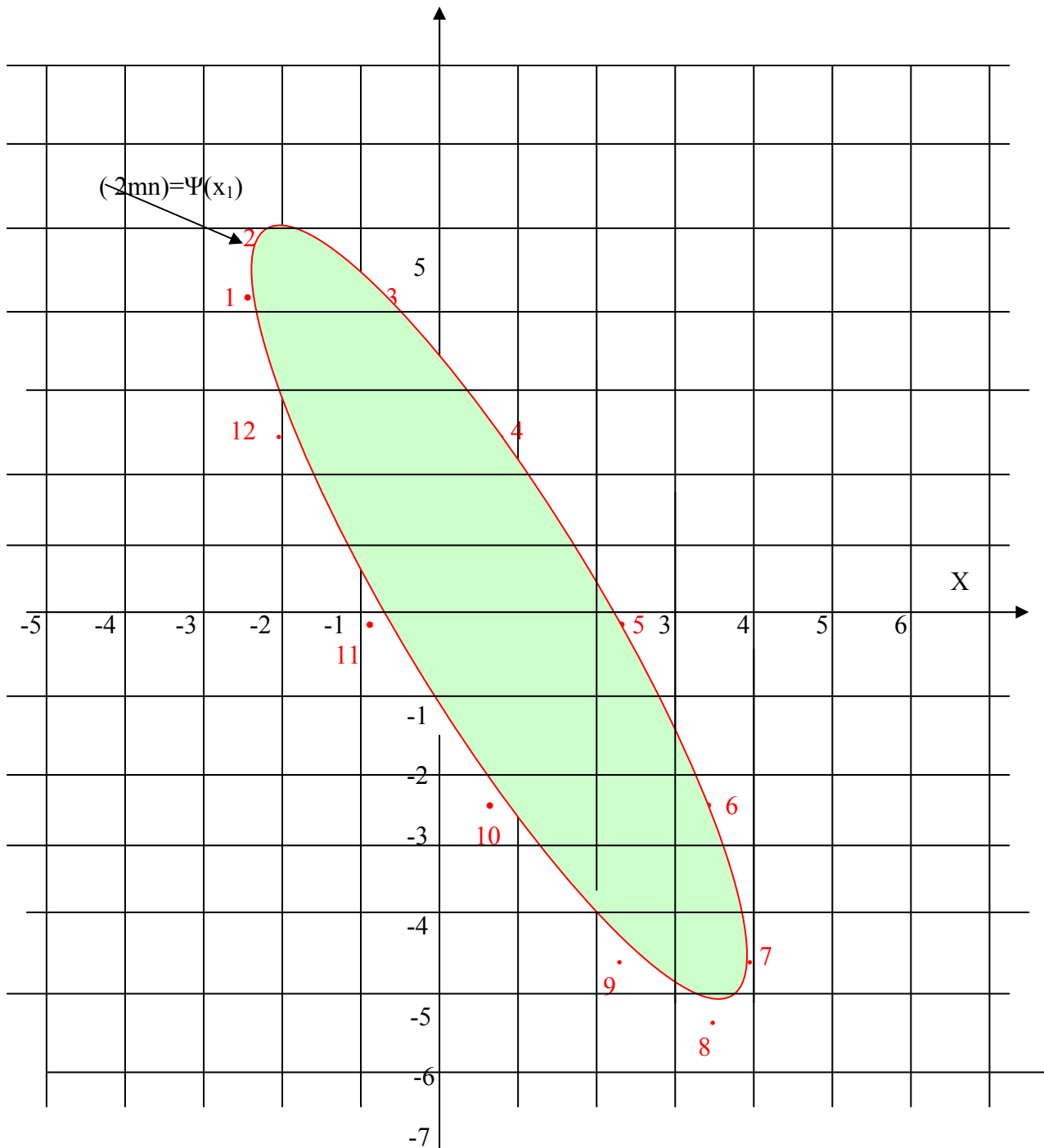


Рис. 2. Эллипс допустимых значений корней уравнения $x^3 - 2x^2 - 6x + d = 0$.

ВЫВОДЫ

1. Преобразование функции с помощью формул системы m параметров переводит ее в дискретный вид и позволяет раскрыть ее тонкую структуру.
2. Для степенного многочлена такое преобразование позволяет получить новые результаты в исследовании функции – эллипс допустимых значений действительных корней кубического многочлена при вариациях свободного члена. что является новым результатом для такой функции.

4.5 Система mn параметров и золотое сечение

Человек различает окружающие его предметы по форме. Интерес к форме какого-либо предмета может быть продиктован жизненной необходимостью, а может быть вызван красотой формы. Форма, в основе построения которой лежат сочетание симметрии и золотого сечения, способствует наилучшему зрительному восприятию и появлению ощущения красоты и гармонии. Целое всегда состоит из частей, части разной величины находятся в определенном отношении друг к другу и к целому. Принцип золотого сечения – высшее проявление структурного и функционального совершенства целого и его частей в искусстве, науке, технике и природе.

Золотое сечение – это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему

$$a : b = b : c \text{ или } c : b = b : a.$$

Отрезки золотой пропорции выражаются бесконечной иррациональной дробью $AE = 0,618\dots$, если AB принять за единицу, $BE = 0,382\dots$. Для практических целей часто используют приближенные значения $0,62$ и $0,38$. Если отрезок AB принять за 100 частей, то большая часть отрезка равна 62, а меньшая – 38 частям.

Более полную информацию см.сайт "Виктор ЛАВРУС Золотое сечение".

Пусть в качестве исходного имеем треугольник ABC , где

$$AB=X=1, BC=Y=0.5, z:=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

Здесь Z имеет иррациональное значение, поэтому если провести итерации по формулам системы mn параметров, то все множество точек на таком дереве будет содержать также иррациональные значения.

Золотой прямоугольник имеет стороны 1 и $Z-0.5=0.618$.

На Рис.1 показан метод нахождения отрезков золотой пропорции с использованием системы mn параметров.Из этого рисунка видно, что

$$AC=Z, AD=AE=n^2 =Z-Y, BC=2mn+2m^2, 2mn=(X+Y)-Z$$

В расчетной таблице представлены значения n^2 и $2mn$ для каждого треугольника.

Прямоугольники ДЗС определяются аналогично (Рис.2).

Программа выполнена в редакторе Mathcad Professional

Программа расчета дерева ЗС с нулевого уровня

В программе следующие условия

1. $X>Y$
2. Все треугольники находятся в секторе $0^0 < \alpha < 45^0$
3. Введено ограничение на расчет дерева ЗС до определенного уровня в зависимости от заданного значения g_{\max} (см. таблицу)

Рекомендуемое максимальное значение $g_{\max} = 3279$, при этом число ПТ в таблице $M = 9841$.

При выборе больших значений g_{\max} следует соблюдать осторожность в связи с большим объемом таблицы и возможностями памяти компьютера. В этом случае рекомендуется записать резервную копию файла программы.

Средняя градация лучами треугольников сектора $0^0 < \alpha < 45^0$ может быть определена по формуле

$$\Delta\alpha = \frac{162000}{265720} = 0.61 \text{ " .}$$

Где 162000- число секунд в секторе
265720- число треугольников
(с использованием 12 уровня дерева ЗС).

Программа

Расчета дерева золотого сечения (ДЗС)

уровень	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
g_{\max}	0	3	12	39	120	363	1092	3279	9840	29523	88572
число ПТ	4	13	40	121	364	1093	3280	9841	29524	88573	265719

За первый уровень дерева золотого сечения принимаем $X=1, Y=0.5, Z=1.118$

Рекомендуемое максимальное значение $g_{\max} = 3279$, при этом число ПТ в таблице $M= 9841$.

При выборе больших значений g_{\max} следует соблюдать осторожность в связи с большим объемом таблицы и возможностями памяти компьютера. В этом случае рекомендуется записать резервную копию файла программы.

Средняя градация лучами треугольников сектора $0^0 < \alpha < 45^0$ может быть определена по формуле

$$\Delta\alpha = \frac{162000}{265720} = 0.61 \text{ " .}$$

Где 162000- число секунд в секторе
265720- число треугольников
(с использованием 12 уровня дерева ЗС).

$M2 := (1 \ 0.5 \ 1.1180339 \ 0.6180339 \ 0.3819661)$

$X_0 := 1 \quad Y_0 := 0.5 \quad Z_0 := 1.1180339$

```

M33 := | V ← M2
        V2 ← 0
        Mg ← M2
        for g ∈ 0.. 39
          V ← | V ← Mg
                X0 ← Mgg,0
                Y0 ← Mgg,1
                Z0 ← Mgg,2
                V ← Mg
                for h ∈ 0.. rows(Mg) - 1
                  Vrows(Mg),0 ← 2 · Z0 + 2 · X0 + Y0
                  Vrows(Mg),1 ← 2 · Z0 + X0 + 2 · Y0
                  Vrows(Mg),2 ← 3 · Z0 + 2 · X0 + 2 · Y0
                  Vrows(Mg)+1,0 ← 2 · Z0 + 2 · X0 - Y0
                  Vrows(Mg)+1,1 ← 2 · Z0 + X0 - 2 · Y0
                  Vrows(Mg)+1,2 ← 3 · Z0 + 2 · X0 - 2 · Y0
                  Vrows(Mg)+2,0 ← 2 · Z0 - X0 + 2 · Y0
                  Vrows(Mg)+2,1 ← 2 · Z0 - 2 · X0 + Y0
                  Vrows(Mg)+2,2 ← 3 · Z0 - 2 · X0 + 2 · Y0
                for h ∈ 0.. rows(Mg) + 1
                  Vh+1,3 ← Vh+1,2 - Vh+1,1
                for h ∈ 0.. rows(Mg) + 1
                  Vh+1,0 ← Vh+1,1 ÷ Vh+1,0
                for h ∈ 0.. rows(Mg) + 1
                  Vh+1,5 ← atan(Vh+1,0) · 57.2958
                for h ∈ 0.. rows(Mg) + 1
                  Vh+1,4 ← Vh+1,0 + Vh+1,1 - Vh+1,2
                V ← V
                Mg ← V
                Mg
          V ← V

```

```
M3 := | V ← M33
      | for b ∈ 0
      |   V0,5 ← 1
      | for b ∈ 1.. 3
      |   Vb,5 ← 2
      | for b ∈ 4.. 12
      |   Vb,5 ← 3
      | for b ∈ 13.. 39
      |   Vb,5 ← 4
      | for b ∈ 40.. 120
      |   Vb,5 ← 5
      | for b ∈ 121.. 363
      |   Vb,5 ← 6
      | for b ∈ 364.. 1092
      |   Vb,5 ← 7
      | for b ∈ 1093.. 3279
      |   Vb,5 ← 8
      | for b ∈ 3280.. 9840
      |   Vb,5 ← 9
      | V
```

X Y Z Z-Y (X+Y)-Z уровень

1	0.5	1.118	0.618	0.382	1
4.736	4.236	6.354	2.118	2.618	2
3.736	2.236	4.354	2.118	1.618	2
2.236	0.736	2.354	1.618	0.618	2
26.416	25.916	37.007	11.09	15.326	3
17.944	8.972	20.062	11.09	6.854	3
16.444	7.472	18.062	10.59	5.854	3
18.416	16.916	25.007	8.09	10.326	3
13.944	7.972	16.062	8.09	5.854	3
9.444	3.472	10.062	6.59	2.854	3
9.916	8.416	13.007	4.59	5.326	3
8.444	5.472	10.062	4.59	3.854	3
3.944	0.972	4.062	3.09	0.854	3
152.762	152.262	215.685	63.423	89.339	4
100.93	48.597	112.02	63.423	37.507	4
99.43	47.097	110.02	62.923	36.507	4
84.985	76.013	114.02	38.007	46.979	4
67.041	40.125	78.131	38.007	29.034	4
40.125	13.208	42.243	29.034	11.09	4
76.485	67.513	102.02	34.507	41.979	4
61.541	37.625	72.131	34.507	27.034	4
34.625	10.708	36.243	25.534	9.09	4
103.762	102.262	145.685	43.423	60.339	4
69.93	34.597	78.02	43.423	26.507	4
65.43	30.097	72.02	41.923	23.507	4
67.985	62.013	92.02	30.007	37.979	4
52.041	30.125	60.131	30.007	22.034	4
34.125	12.208	36.243	24.034	10.09	4
42.485	36.513	56.02	19.507	22.979	4
35.541	22.625	42.131	19.507	16.034	4
17.625	4.708	18.243	13.534	4.09	4
54.262	52.762	75.685	22.923	31.339	4
37.43	19.097	42.02	22.923	14.507	4
32.93	14.597	36.02	21.423	11.507	4
42.485	39.513	58.02	18.507	23.979	4
31.541	17.625	36.131	18.507	13.034	4
22.625	8.708	24.243	15.534	7.09	4
16.985	14.013	22.02	8.007	8.979	4
15.041	10.125	18.131	8.007	7.034	4
6.125	1.208	6.243	5.034	1.09	4
889.158	888.658	1257.106	368.448	520.71	5
584.633	279.608	648.056	368.448	216.185	5
583.133	278.108	646.056	367.948	215.185	5
474.495	422.163	635.112	212.949	261.546	5
377.302	227.776	440.725	212.949	164.353	5
220.303	70.777	231.394	160.616	59.687	5
465.995	413.663	623.112	209.449	256.546	5
371.802	225.276	434.725	209.449	162.353	5
214.803	68.277	225.394	157.116	57.687	5
474.023	465.051	664.056	199.005	275.018	5
321.997	160.998	360.003	199.005	122.992	5
295.08	134.082	324.115	190.033	105.048	5
330.469	303.553	448.725	145.172	185.297	5
250.22	143.054	288.226	145.172	105.048	5
169.471	62.305	180.561	118.256	51.215	5
177.943	151.026	233.394	82.367	95.575	5
151.526	98.193	180.561	82.367	69.159	5

70.777	17.444	72.895	55.451	15.326	5
424.523	415.551	594.056	178.505	246.018	5
289.497	145.498	324.003	178.505	110.992	5
262.58	118.582	288.115	169.533	93.048	5
304.969	281.053	414.725	133.672	171.297	5
229.72	130.554	264.226	133.672	96.048	5
157.971	58.805	168.561	109.756	48.215	5
152.443	128.526	199.394	70.867	81.575	5
131.026	85.693	156.561	70.867	60.159	5
59.277	13.944	60.895	46.951	12.326	5
601.158	599.658	849.106	249.448	351.71	5
396.633	190.608	440.056	249.448	147.185	5
392.133	186.108	434.056	247.948	144.185	5
330.495	295.163	443.112	147.949	182.546	5
261.302	156.776	304.725	147.949	113.353	5
155.303	50.777	163.394	112.616	42.687	5
304.995	269.663	407.112	137.449	167.546	5
244.802	149.276	286.725	137.449	107.353	5
138.803	43.277	145.394	102.116	36.687	5
382.023	376.051	536.056	160.005	222.018	5
257.997	127.998	288.003	160.005	97.992	5
240.08	110.082	264.115	154.033	86.048	5
254.469	232.553	344.725	112.172	142.297	5
194.22	112.054	224.226	112.172	82.048	5
128.471	46.305	136.561	90.256	38.215	5
152.943	131.026	201.394	70.367	82.575	5
128.526	82.193	152.561	70.367	58.159	5
62.777	16.444	64.895	48.451	14.326	5
233.523	227.551	326.056	98.505	135.018	5
160.497	81.498	180.003	98.505	61.992	5
142.58	63.582	156.115	92.533	50.048	5
177.969	165.053	242.725	77.672	100.297	5
132.72	74.554	152.226	77.672	55.048	5
93.971	35.805	100.561	64.756	29.215	5
76.443	63.526	99.394	35.867	40.575	5
67.026	44.693	80.561	35.867	31.159	5
28.277	5.944	28.895	22.951	5.326	5
312.658	311.158	441.106	129.948	182.71	5
207.133	100.108	230.056	129.948	77.185	5
202.633	95.608	224.056	128.448	74.185	5
177.995	159.663	239.112	79.449	98.546	5
139.802	83.276	162.725	79.449	60.353	5
84.803	28.277	89.394	61.116	23.687	5
152.495	134.163	203.112	68.949	83.546	5
123.302	75.776	144.725	68.949	54.353	5
68.303	20.777	71.394	50.616	17.687	5
240.523	237.551	338.056	100.505	140.018	5
161.497	79.498	180.003	100.505	60.992	5
152.58	70.582	168.115	97.533	55.048	5
152.969	139.053	206.725	67.672	85.297	5
117.72	68.554	136.226	67.672	50.048	5
75.971	26.805	80.561	53.756	22.215	5
102.443	88.526	135.394	46.867	55.575	5
85.026	53.693	100.561	46.867	38.159	5
43.277	11.944	44.895	32.951	10.326	5
92.023	89.051	128.056	39.005	53.018	5
63.997	32.998	72.003	39.005	24.992	5
55.08	24.082	60.115	36.033	19.048	5
76.469	71.553	104.725	33.172	43.297	5
56.22	31.054	64.226	33.172	23.048	5

41.471	16.305	44.561	28.256	13.215	5
25.943	21.026	33.394	12.367	13.575	5
23.526	16.193	28.561	12.367	11.159	5
8.777	1.444	8.895	7.451	1.326	5

В матрице М3 приведены данные значений сторон треугольников с первого до пятого уровней подмножества "Дерева Золотого Сечения" (ДЗС). Для полного раскрытия данных матрицы М3 необходимо установить курсор внутри матрицы, кликнуть мышкой и с помощью правого движка сместить данные на требуемый участок матрицы.

На Рис. 1 представлены прямоугольники первого и второго уровней ДЗС.

Расчет этих "золотых прямоугольников (ЗП)" для каждой строки матрицы М3 производится следующим образом

1. Определяется первая сторона ЗП $u=(Z-Y)/X$

2. Определяется вторая сторона ЗП $v=(X+Y-Z)/X$

3. Золотой прямоугольник записывается в виде ЗП(u, v) для каждой строки матрицы М3.

Пересчет всех данных матрицы М3 производится с помощью программы М4.

В этой матрице в строке №20 представлен ЗП(0.561x 0.439).

На сайте "Виктор ЛАВРУС Золотое сечение" этот прямоугольник назван

" Второе золотое сечение".

Вывод: Дерево золотых прямоугольников может быть использовано в практической работе художниками, архитекторами, конструкторами и дизайнерами.


```

M4 := | V ← 0
      | V0,0 ← 0.618
      | V0,1 ← 0.382
      | V0,2 ← 1
      | for h ∈ 1.. rows(M3) - 1
      |   Vh,0 ← M3h,3 ÷ M3h,0
      |   for h ∈ 1.. rows(M3) - 1
      |     Vh,1 ← M3h,4 ÷ M3h,0
      |   for b ∈ 1.. 3
      |     Vb,2 ← 2
      |   for b ∈ 4.. 12
      |     Vb,2 ← 3
      |   for b ∈ 13.. 39
      |     Vb,2 ← 4
      |   for b ∈ 40.. 120
      |     Vb,2 ← 5
      |   for b ∈ 121.. 363
      |     Vb,2 ← 6
      |   for b ∈ 364.. 1092
      |     Vb,2 ← 7
      |   for b ∈ 1093.. 3279
      |     Vb,2 ← 8
      |   for b ∈ 3280.. 9840
      |     Vb,2 ← 9
      | V ← V

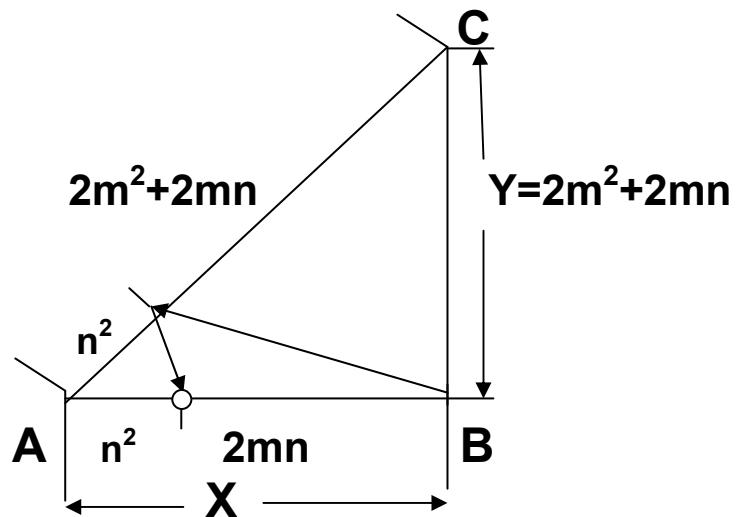
```

Матрица дерева " золотых прямоугольников "

0.618	0.382	1
0.447	0.553	2
0.567	0.433	2
0.724	0.276	2
0.42	0.58	3
0.618	0.382	3
0.644	0.356	3
0.439	0.561	3
0.58	0.42	3
0.698	0.302	3
0.463	0.537	3
0.544	0.456	3
0.783	0.217	3
0.415	0.585	4
0.628	0.372	4
0.633	0.367	4
0.447	0.553	4
0.567	0.433	4
0.724	0.276	4
0.451	0.549	4
0.561	0.439	4
0.737	0.263	4
0.418	0.582	4
0.621	0.379	4
0.641	0.359	4
0.441	0.559	4
0.577	0.423	4
0.704	0.296	4
0.459	0.541	4
0.549	0.451	4
0.768	0.232	4
0.422	0.578	4
0.612	0.388	4
0.651	0.349	4
0.436	0.564	4
0.587	0.413	4
0.687	0.313	4
0.471	0.529	4
0.532	0.468	4
0.822	0.178	4
0.414	0.586	5
0.63	0.37	5
0.631	0.369	5
0.449	0.551	5
0.564	0.436	5
0.729	0.271	5
0.449	0.551	5
0.563	0.437	5
0.731	0.269	5
0.42	0.58	5
0.618	0.382	5
0.644	0.356	5
0.439	0.561	5
0.58	0.42	5
0.698	0.302	5
0.463	0.537	5
0.544	0.456	5
0.783	0.217	5

0.42	0.58	5
0.617	0.383	5
0.646	0.354	5
0.438	0.562	5
0.582	0.418	5
0.695	0.305	5
0.465	0.535	5
0.541	0.459	5
0.792	0.208	5
0.415	0.585	5
0.629	0.371	5
0.632	0.368	5
0.448	0.552	5
0.566	0.434	5
0.725	0.275	5
0.451	0.549	5
0.561	0.439	5
0.736	0.264	5
0.419	0.581	5
0.62	0.38	5
0.642	0.358	5
0.441	0.559	5
0.578	0.422	5
0.703	0.297	5
0.46	0.54	5
0.547	0.453	5
0.772	0.228	5
0.422	0.578	5
0.614	0.386	5
0.649	0.351	5
0.436	0.564	5
0.585	0.415	5
0.689	0.311	5
0.469	0.531	5
0.535	0.465	5
0.812	0.188	5
0.416	0.584	5
0.627	0.373	5
0.634	0.366	5
0.446	0.554	5
0.568	0.432	5
0.721	0.279	5
0.452	0.548	5
0.559	0.441	5
0.741	0.259	5
.418	0.582	5
0.622	0.378	5
0.639	0.361	5
0.442	0.558	5
0.575	0.425	5
0.708	0.292	5
0.457	0.543	5
0.551	0.449	5

0.761	0.239	5
0.424	0.576	5
0.609	0.391	5
0.654	0.346	5
0.434	0.566	5
0.59	0.41	5
0.681	0.319	5
0.477	0.523	5
0.526	0.474	5
0.849	0.151	5



○ - точка деления отрезка X в пропорциональном отношении

Рис. 1 Деление отрезка в пропорциональном отношении

Для треугольника “золотого сечения”

$$X = 1, Y = 0.5, Z = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = 1.1180339$$

$$n^2 = Z - Y = 0.6180339, 2mn = 1 - 0.6180339 = 0.3819661$$

**Первый уровень
Золотой прямоугольник
0.618x0.382**

**Второй уровень $\Delta 1$
0.5528 x 0.4472**

**Второй уровень $\Delta 2$
0.5669x 0.4331**

**Второй уровень $\Delta 3$
0.7236x 0.2764**

**Рис.2 Первый и второй уровни
дерева золотого сечения (ДЗС)**

4.6 Сравнения в системе m параметров

Если A и B – два целых числа и их разность $(A - B)$ делится на число μ , то это выражается записью $A \equiv B \pmod{\mu}$, которая читается так: A сравнимо с B по модулю μ . [О.Оре. Приглашение в теорию чисел.Изд. Наука.М. 1980.Стр.90].
В системе m параметров, на основании теоремы цикличности, для значений сторон любого треугольника, имеем

$$x = b + c, y = d + c, z = b + c + d$$

Так как A и B – два целые числа, то можно записать $A = b + c, B = d + c$,

$$\text{где } b, c, d \text{ – целые числа. } \rightarrow A - B = (b - d).$$

Если число $(b - d)$ делится на число μ , то можно записать $b \equiv d \pmod{\mu}$
Таким образом выполнены все условия формулировки сравнения.

Пусть имеем A, B – катеты прямоугольного треугольника

$$A = X = n^2 + 2mn, B = Y = 2m^2 + 2mn.$$

Это один из вариантов формул. Остальные варианты представлены в таблице 1.

$$\rightarrow A - B = (n^2 + 2mn) - (2m^2 + 2mn) = (n^2 - 2m^2) \rightarrow b = n^2, d = 2m^2$$

Из формулы $A - B = (n^2 - 2m^2)$ видно, что число μ – множитель в значениях n^2 и $2m^2$. $\rightarrow (n^2 - 2m^2) = \mu \cdot h \rightarrow (n + m \cdot \sqrt{2}) \cdot (n - m \cdot \sqrt{2}) = \mu \cdot h$.

$$\text{Пусть } \mu > h \rightarrow \mu = (n + m \cdot \sqrt{2}), h = (n - m \cdot \sqrt{2})$$

Таблица 1

№	0	1	2	3
	$Z+x=2m^2$ $z+y=n^2$	$z-x=2m^2$ $z-y=n^2$	$z+x=2m^2$ $z-y=n^2$	$z-x=2m^2$ $z+y=n^2$
X_0	$2mn-n^2$	n^2+2mn	$2mn-n^2$	n^2-2mn
Y_0	$2mn-2m^2$	$2m^2+2mn$	$2m^2-2mn$	$2mn-2m^2$
Z_0	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$
№	4	5	6	7
	$z+x=n^2$ $z+y=2m^2$	$z-x=n^2$ $z-y=2m^2$	$z+x=n^2$ $z-y=2m^2$	$z-x=n^2$ $z+y=2m^2$
X_0	$2mn-2m^2$	$2m^2+2mn$	$2mn-2m^2$	$2m^2-2mn$
Y_0	$2mn-n^2$	n^2+2mn	n^2+2mn	$2mn-n^2$
Z_0	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$

Пример 1. Пусть $A = 47, B = 11. \rightarrow A - B = 47 - 11 = 36 = 9 \cdot 4$

$$47 \equiv 11 \pmod{9}. \quad \mu = 9, h = 4$$

$$\text{Тогда из формулы (8) } \rightarrow 9 = n_0 + m_0 \cdot \sqrt{2}, 4 = n_0 - m_0 \cdot \sqrt{2}$$

$$\rightarrow 9 - n_0 = n_0 - 4 \rightarrow 13 = 2 n_0 \rightarrow n_0 = \frac{13}{2} = 6.5$$

$$\rightarrow m_0 = \frac{9 - n_0}{\sqrt{2}} = \frac{9 - 6.5}{\sqrt{2}} = 1.7678 \rightarrow m_0 \cdot \sqrt{2} = 2.5 \rightarrow 2m^2 = 6.25$$

$$\rightarrow A - B = 47 - 11 = n^2 - 2m^2 = 42.25 - 6.25 = 36.$$

Пример 2. Пусть $A = 23, B = 8. \rightarrow A - B = 23 - 8 = 15 = 5 \cdot 3$
 $23 \equiv 8 \pmod{5} .$

Обозначим больший множитель через μ . Меньший множитель через h

$$\rightarrow \mu = 5, h = 3 \text{ Тогда } 5 = n + m \cdot \sqrt{2}, 3 = n - m \cdot \sqrt{2}$$

$$\rightarrow 5 - n = n - 3 \rightarrow n = 4 \rightarrow m \cdot \sqrt{2} = 1 \quad 2m^2 = 1 .$$

$$\rightarrow A - B = 23 - 8 = n^2 - 2m^2 = 16 - 1 = 15. \rightarrow 16 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\rightarrow n^2 \equiv 2m^2 \pmod{5}$$

На странице 93 (см. О.Оре) рассмотрен пример $8 \equiv 1 \pmod{1}$

Использование системы mn параметров

В сравнениях имеют место два исходных числа A, B .

Примем постулат “Исходные числа (A, B) – катеты прямоугольного треугольника”

Пример 3. Пусть задано два числа $A = X_0 = 47, B = Y_0 = 11$

$$\rightarrow Z_0 = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{47^2 + 11^2} = 48.27$$

Теперь, можно записать итерационные формулы дерева исходных данных

$$\begin{aligned} x_{11} &= 2z_0 + 2x_0 + y_0 \\ E_1: y_{11} &= 2z_0 + x_0 + 2y_0 \\ z_{11} &= 3z_0 + 2x_0 + 2y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{12} &= 2z_0 - 2x_0 + y_0 \\ E_2: y_{12} &= 2z_0 - x_0 + 2y_0 \\ z_{12} &= 3z_0 - 2x_0 + 2y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{13} &= 2z_0 + 2x_0 - y_0 \\ E_3: y_{13} &= 2z_0 + x_0 - 2y_0 \\ z_{13} &= 3z_0 + 2x_0 - 2y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{14} &= |2z_0 - 2x_0 - y_0| \\ E_4: y_{14} &= |2z_0 - x_0 - 2y_0| \\ z_{14} &= 3z_0 - 2x_0 - 2y_0 , \end{aligned}$$

Первая итерация

$$\begin{aligned} x_{11} &= 2z_0 + 2x_0 + y_0 = 96.54 + 94 + 11 = 201.54 \\ y_{11} &= 2z_0 + x_0 + 2y_0 = 96.54 + 47 + 22 = 165.54 \\ z_{11} &= 3z_0 + 2x_0 + 2y_0 = 144.81 + 94 + 22 = 260.81 \end{aligned}$$

$$\rightarrow x_{11} - y_{11} = 201.54 - 165.54 = 36 = 9 \cdot 4 \rightarrow 201.54 \equiv 165.54 \pmod{9}$$

$$x_{12} = 2z_0 - x_0 + 2y_0 = 96.54 - 47 + 22 = 71.54$$

$$y_{12} = 2z_0 - 2x_0 + y_0 = 96.54 - 94 + 11 = 13.54$$

$$z_{12} = 3z_0 - 2x_0 + 2y_0 = 144.81 - 94 + 22 = 72.81$$

$$\rightarrow x_{12} - y_{12} = 71.54 - 13.54 = 58 = 29 \cdot 2 \rightarrow 71.54 \equiv 13.54 \pmod{29}$$

$$x_{13} = 2z_0 + 2x_0 - y_0 = 96.54 + 94 - 11 = 179.54$$

$$y_{13} = 2z_0 + x_0 - 2y_0 = 96.54 + 47 - 22 = 121.54$$

$$z_{13} = 3z_0 + 2x_0 - 2y_0 = 144.81 + 94 - 22 = 216.81$$

$$\rightarrow x_{13} - y_{13} = 179.54 - 121.54 = 58 = 29 \cdot 2 \rightarrow 179.54 \equiv 121.54 \pmod{29}$$

Из анализа этих результатов следуют выводы

Использование итерационных формул E_1 дает возможность получить два

новых целых числа (X_{11} , Y_{11}) для которых можно записать $X_{11} - Y_{11} = A - B$

$$A \equiv B \pmod{\mu} \text{ и } X_{11} \equiv Y_{11} \pmod{\mu},$$

$$\text{где } x_{11} = 2 \cdot \sqrt{A^2 + B^2} + 2A + B, y_{11} = 2 \cdot \sqrt{A^2 + B^2} + A + 2B$$

1. Использование итерационных формул E_1 дает возможность получить два новых целых числа (X_{12} , Y_{12}) для которых можно записать $X_{12} - Y_{12} = A + B$.

2. Использование итерационных формул E_1 дает возможность получить два новых целых числа (X_{13} , Y_{13}) для которых можно записать $X_{13} - Y_{13} = A + B$.

При последовательном применении итерационных формул к данным, получаемых в результате предыдущей итерации получим массив (множество), который образует дерево пар чисел подобным дереву ПТ.

X	Y	Z
47	11	48.27
201.54	165.54	260.81
1090.241	1054.241	1516.592
6267.907	6231.907	8838.74
36445.201	36409.201	51515.848
212331.298	212295.298	300256.346
1237470.586	1237434.586	1750022.23
7212420.218	7212384.218	10199877.034
42036978.723	42036942.723	59449239.976
245009380.121	245009344.121	346495562.82
1428019230.003	1428019194.003	2019524136.944
8323105927.896	8323105891.896	1.177e10

Здесь для любой строки имеем $X - Y = 36$

Вывод: Последовательное применение итерационных формул к данным, получаемых в результате предыдущей итерации, дает возможность получать **неограниченное число пар чисел** (X_i, Y_i) для которых можно записать $X_i \equiv Y_i \pmod{.}$, где i – порядковый номер итерации, $.$ -делитель разности исходной пары чисел. Метод последовательного получения пар чисел, имеющих одинаковую разность с исходной парой данных A, B расширяет возможности аппарата сравнений по модулю.

4.7 Система m n параметров Решение проблемы простых и составных чисел

Гипотеза Римана, 1859 [теория чисел]. Считается, что распределение простых чисел среди натуральных не подчиняется никакой закономерности. Однако немецкий математик Риман высказал предположение, касающееся свойств последовательности простых чисел. Если гипотеза Римана будет доказана, то это приведет к революционному изменению наших знаний в области **шифрования** и к невиданному прорыву в области **безопасности Интернета**.

Простое число — это натуральное число, которое имеет ровно 2 натуральных делителя (только 1 и самого себя). Все остальные числа кроме единицы называются составными. Таким образом, все натуральные числа, за исключением единицы, разбиваются на простые и составные. Изучением свойств простых чисел занимается теория чисел. В теории колец простым числам соответствуют неприводимые элементы.

Последовательность простых чисел начинается так:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, ... (см. сайт Википедии).

Проблема простых чисел заключается в определении закономерности их распределения в натуральном ряду нечетных чисел. Или иначе, необходимо определить **ряд простых чисел как упорядоченное множество**. Особенность Это нечетные числа, кроме числа 2.

Запишем фрагмент нечетных чисел

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149,

На основании данного фрагмента можно сформулировать **первую аксиому** “Все простые числа (за исключением числа 2) находятся в натуральном ряду нечетных чисел “.

Здесь красным цветом выделены числа не входящие в ряд простых чисел. Сложность задачи заключается в том, что пока не удалось ответить на вопрос “ **Существует или нет аналитическая закономерность множества простых чисел?** ”.

Задача 1 “ Задано нечетное число N . Необходимо определить является это число простым или нет“.

На сегодняшней день решения этой задачи пока нет

Обратимся к системе m n параметров

По Серпинскому основным пифагоровым треугольником (ПТ) называется прямоугольный треугольник с взаимно-простыми значениями сторон.

Особенности системы m n параметров

1. Значения трех сторон треугольника ПТ являются взаимно-простыми
2. Дерево ПТ имеет такие ПТ в которых значение одной (или двух) сторон является простым числом.
3. Дерево ПТ имеет такие ПТ в которых значение любой из сторон является составным числом.
4. Для любого нечетного числа N имеет место ПТ вида ПТ ($a^2 + b^2, N, 2ab$)
- 5 К элементам ПТ вида ПТ ($a^2 + b^2, N, 2ab$) можно применять формулы таблицы 1
- 6 К элементам ПТ вида ПТ ($a^2 + b^2, N, 2ab$) можно применять итерационные формулы системы m n параметров.

Таким образом решение задачи 1 сводится к решению задачи 2.

Задача 2 “ Задано нечетное число N. Необходимо определить, с помощью формул системы mn параметров, что это число составное “.

При этом, если N не составное, то тогда это число – простое.

В системе mn параметров можно сформулировать **вторую аксиому**

“ Для любого нечетного числа N имеет место основной ПТ вида ПТ ($n^2 + 2mn$, N, $n^2 - 2mn$) “.

$$\rightarrow X_0 = n^2 + 2mn, Y_0 = N, Z_0 = n^2 - 2mn$$

Для дальнейших расчетов используем формулы варианта б . Тогда (см. Таблица1)

$$\rightarrow X_0 = 2m^2 + 2mn, Y_0 = n^2 + 2mn, Z_0 = n^2 + 2mn + 2m^2$$

$$\rightarrow Z_0 - X_0 = n^2, Z_0 - Y_0 = 2m^2$$

$$\rightarrow \text{Для ПТ (} n^2 + 2mn, N, n^2 - 2mn) \rightarrow n = 1, m = \frac{N-1}{4}$$

Таблица1

№	0	1	2	3	4	5	6	7
$2m^2$	$Z_0 + X_0$	$Z_0 + X_0$	$Z_0 - X_0$	$Z_0 - X_0$	$Z_0 + Y_0$	$Z_0 + Y_0$	$Z_0 - Y_0$	$Z_0 - Y_0$
n^2	$Z_0 + Y_0$	$Z_0 - Y_0$	$Z_0 - Y_0$	$Z_0 + Y_0$	$Z_0 + X_0$	$Z_0 - X_0$	$Z_0 - X_0$	$Z_0 + X_0$
X_0	$2mn - n^2$	$2mn - n^2$	$2mn + n^2$	$(2mn + 2m^2)$	$2mn - 2m^2$	$2m^2 - 2mn$	$2mn + 2m^2$	$-(2mn + 2m^2)$
Y_0	$2mn - 2m^2$	$2m^2 - 2mn$	$2mn + 2m^2$	$-(2mn + 2m^2)$	$2mn - n^2$	$2mn - n^2$	$2mn + n^2$	$2mn + n^2$
Z_0	$n^2 - 2mn + 2m^2$	$n^2 - 2mn + 2m^2$	$n^2 + 2mn + 2m^2$	$n^2 + 2mn + 2m^2$	$n^2 - 2mn + 2m^2$	$n^2 - 2mn + 2m^2$	$n^2 + 2mn + 2m^2$	$n^2 + 2mn + 2m^2$

Из данных таблицы 1 следует, что нечетные числа могут иметь аналитические формулы 1.5,

где (N, n, m) – целые числа.

Третья аксиома

“ Для основного ПТ вида ПТ ($n^2 + 2mn$, N, $n^2 - 2mn$) всегда $n = 1, m = \frac{N-1}{4}$ “.

В системе mn параметров любое число N можно записать в виде

$$N = n^2 + 2mn \quad (1)$$

$$N = n^2 - 2mn \quad (2)$$

$$N = 2mn - n^2 \quad (3)$$

$$N = (n + m)^2 + m^2 \quad (4)$$

$$N = (n - m)^2 + m^2 \quad (5)$$

Для основных ПТ параметры mn всегда имеют целые значения.

Простое число

Из уравнения (1) следует $n^2 + 2mn - N = 0$. Если N – число простое, то $n = 1$

$$\rightarrow 1 + 2m = N \rightarrow m = \frac{N-1}{2} \rightarrow \text{ПТ (} \frac{N-1}{2}, N, \frac{N-1}{2})$$

Пример 1. Пусть имеем в качестве исходного числа N = 5

$$\rightarrow X_0 = n^2 + 2mn = 1^2 + 2 \cdot 2 = 5, Y_0 = 5, Z_0 = n^2 - 2mn = 1^2 - 2 \cdot 2 = -3 \rightarrow \text{ПТ}_0(5, 5, -3)$$

$$\rightarrow Z_0 - X_0 = n^2$$

$$-3 = 5 - 8 = 1, Z_0 - Y_0 = 2m^2 = 13 - 5 = 8 \rightarrow m = 2$$

$$\rightarrow X_0 = 2m^2 + 2mn = 8 + 4 = 12, Y_0 = n^2 + 2mn = 1 + 4 = 5, Z_0 = n^2 + 2mn + 2m^2 = 12 + 1 = 13$$

$$\rightarrow n^2 + 2mn - 5 = 0 \rightarrow n_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - 2m^2 + 5} . \text{ Для простого числа } n = 1 \rightarrow m = \frac{N-1}{2} = 2$$

Любое число

На основании уравнения (1) $\rightarrow n_2 + 2mn - N = 0 \rightarrow n_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 + N}$.

В этом уравнении имеем два неизвестных числа, т. е. n и m . Произведем дополнение подкоренного выражение таким образом, чтобы сумма $m^2 + N = A_2$, где (m, A_2) – целые числа и A_2 – наименьший из возможных квадратов.

Пример 2. Пусть имеем в качестве исходного числа $N = 15$. Необходимо аналитически определить $N = 15$ это простое, или составное число.

Решение.

1. На основании уравнения (1) $\rightarrow n_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 + N}$

2. Дополним подкоренное выражение до квадратного числа. Пусть $m^2 = 1$
 $\rightarrow m = 1 \rightarrow n_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 15} \rightarrow n_{1,2} = -1 \pm 4 \rightarrow n_1 = 3, n_2 = -5.$

Внимание! $n_1 \cdot n_2 = -3 \cdot 5 = -15$. Ответ: 15 – число составное.

Пример 3. Пусть имеем в качестве исходного числа $N = 77$. Необходимо аналитически определить $N = 77$ это простое, или составное число.

Решение.

1. На основании уравнения (1) $\rightarrow n_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 + N}$

2. Дополним подкоренное выражение до квадратного числа. Пусть $m^2 = 4$
 $\rightarrow m = 2 \rightarrow n_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 77} \rightarrow n_{1,2} = -2 \pm 9 \rightarrow n_1 = 7, n_2 = -11.$

$n_1 \cdot n_2 = -7 \cdot 11 = -77$. Ответ: 77 – число составное.

Пример 4. Пусть имеем в качестве исходного числа $N = 113$. Необходимо аналитически определить $N = 113$ это простое, или составное число.

Решение.

1. На основании уравнения (1) $\rightarrow n_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 + N}$

2. Дополним подкоренное выражение до квадратного числа. Пусть $m = 56$
 $\rightarrow m = 56 \rightarrow n_{1,2} = -56 \pm \sqrt{56^2 + 113} \rightarrow n_{1,2} = -56 \pm 57 \rightarrow n_1 = 1, n_2 = -113.$

$n_1 \cdot n_2 = -1 \cdot 113 = -113$. Ответ: 113 – число простое.

Пример 5. Пусть имеем в качестве исходного числа $N = 503$. Необходимо аналитически определить $N = 503$ это простое, или составное число.

Решение.

1. На основании уравнения (1) $\rightarrow n_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 + N}$

2. Дополним подкоренное выражение до квадратного числа. Пусть $m = 251$
 $\rightarrow m = 251 \rightarrow n_{1,2} = -251 \pm \sqrt{251^2 + 503} \rightarrow n_{1,2} = -251 \pm 252 \rightarrow n_1 = 1, n_2 = -503.$

$n_1 \cdot n_2 = -1 \cdot 503 = -503$. Ответ: 503 – число простое.

Утверждение “ Структуру любого целого числа N можно определить методом решения квадратного уравнения $n_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 + N}$, где (m, N) – целые числа, сумма $m^2 + N = A_2$ и A_2 – минимально возможное значение квадрата целого числа. Если N – простое число, то $m = \sqrt{N-1}$ “.

Задача решена!

Приоритет решения задачи определения простого числа Фильчевым Э.Г. подтверждается депонированными статьями (1981.1982г.г.), статьями и Монографией (см. сайт fgg-fil1.narod.ru/index.html).

E- Mail: fgg-fil1@narod.ru

4.7 Решение кубического уравнения в системе mn параметров

Решение кубического уравнения на основе современных методов не представляется тривиальным. В любом справочнике по математике предлагаются следующие методы

- разложение левой части на линейные множители (если возможно)
- с помощью формулы Кардана
- применение специальных таблиц

(см. например, И.Н.Бронштейн. К.А.Семендяев. Справочник по математике ...М. Наука 1980. стр.219).

В данной статье рассматривается метод решения любых кубических уравнений

включая неприводимый случай формулы Кардана!

Задача "Задано кубическое уравнение вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Используя формулы системы mn параметров предложить метод определения нулей исходного уравнения ". Пусть $a = 1$.

Решение

На сайте fgg-fil1.narod.ru/fmat16.doc приведена, полученная автором, формула **mn** преобразования степенной функции. Для кубического уравнения эта формула имеет вид

$$(2mn)^2 + (3x + b)(2mn) + 3x^2 + 2bx + c = 0 \quad (1)$$

где

x - любой из нулей (корней) исходного уравнения

$2mn$ - разность любой пары из трех нулей исходного уравнения

Решив уравнение (1) относительно x и подставив это значение в исходное уравнение, в результате, после простых, но громоздких преобразований, получим

$$(2mn)^6 + 2(3c - b^2)(2mn)^4 + (3c - b^2)^2(2mn)^2 + [4(3c - b^2)^3 + (2b^3 - 9bc + 27d)^2]/27 = 0 \quad (2)$$

Это уравнение устанавливает связь коэффициентов исходного уравнения с параметром $(2mn)$ и является кубическим относительно $(2mn)^2$. На основании формул Виета и уравнения (2) можно сделать следующее утверждение

Утверждение1 "Для любого кубического уравнения вида $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ справедливы уравнения

$$3x^2 + 2bx + c = -(2mn)_1(2mn)_2$$

$$2(3c - b^2) = -[(2mn)_1^2 + (2mn)_2^2 + (2mn)_3^2]$$

$$[4(3c - b^2)^3 + (2b^3 - 9bc + 27d)^2]/27 = -(2mn)_1^2(2mn)_2^2(2mn)_3^2$$

где $(2mn)_j$ - разность любой пары корней исходного уравнения.

x - один (любой) из корней исходного уравнения. "

1. Для любого кубического уравнения вида $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ определяем значение

$$D_1 = - \frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27} = -(2mn)_1^2 \cdot (2mn)_2^2 \cdot (2mn)_3^2$$

2. Определяем значение

$$D_2 = -2(3c - b^2) = -[(2mn)_1^2 + (2mn)_2^2 + (2mn)_3^2]$$

Из этих уравнений следует, что

- если выражение $-2(3c - b^2)$ - целое число, то оно разложимо на сумму трех квадратов
- и если при этом выполняется равенство $D_1 = -(2mn)_1^2(2mn)_2^2(2mn)_3^2$,

то в результате получим решение для $(2mn)_1, (2mn)_2, (2mn)_3$.

3. Определяем значение корней исходного уравнения

$$3x^2 + 2bx + c = - (2mn)_1(2mn)_2$$

$$3x^2 + 2bx + c = (2mn)_1(2mn)_2$$

$$3x^2 + 2bx + c = - (2mn)_1(2mn)_3$$

$$3x^2 + 2bx + c = (2mn)_1(2mn)_3$$

$$3x^2 + 2bx + c = - (2mn)_2(2mn)_3$$

$$3x^2 + 2bx + c = (2mn)_2(2mn)_3$$

Задача решена !

Пример 1 Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$$

где $a=1, b=-9, c=23, d=-15$

Решение

1. Определяем значение $D_1 = - \frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

$$\rightarrow D_1 = - [4(69-81)^3 + (-1458 + 1863 - 405)^2] / 27 = - [4(69-81)^3 + 0] / 27 = 256 = 16^2$$

Обратим внимание, что в этом примере $(2b^3 - 9bc + 27d) = 0$

2. Определяем значение $D_2 = - 2(3c - b^2)$

$$\rightarrow D_2 = - 2(3 \cdot 23 - 81) = 24 = 4 + 16 + 4$$

Это единственное разложение числа 24 на три квадрата. Следовательно имеем $(2mn)_1 = 2, (2mn)_2 = 4, (2mn)_3 = 2$.

3. Определяем значение нулей (корней) исходного уравнения

3.1 $3x^2 + 2bx + c = - (2mn)_1(2mn)_2$

$$\rightarrow 3x^2 - 18x + 23 = - 2 \cdot 4 \rightarrow 3x^2 - 18x + 31 = 0. \text{ Нет действительных решений.}$$

3.2 $3x^2 + 2bx + c = (2mn)_1(2mn)_2$

$$\rightarrow 3x^2 - 18x + 23 = 2 \cdot 4 \rightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\rightarrow X_1 = 3 + 2 = 5, X_2 = 3 - 2 = 1$$

Здесь $X_1 = 5$ - одно из решений исходного уравнения.

Здесь $X_2 = 1$ второе решение исходного уравнения.

3.3 $3x^2 + 2bx + c = - (2mn)_1(2mn)_3$

$$\rightarrow 3x^2 - 18x + 23 = - 2 \cdot 2 \rightarrow 3x^2 - 18x + 27 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\rightarrow X_2 = 3$$

Здесь $X = 3$ - последнее из решений исходного уравнения.

3.4 $3x^2 + 2bx + c = (2mn)_1(2mn)_3$

$$\rightarrow 3x^2 - 18x + 23 = 2 \cdot 2 \rightarrow 3x^2 - 18x + 19 = 0. \text{ Нет решений исходного уравнения.}$$

Задача решена!

Пример 2 Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

$$x^3 - 20x^2 + 113x - 154 = 0$$

где $a=1, b=-20, c=113, d=-154$

Решение

1. Определяем значение $D_1 = - \frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

$$\rightarrow D_1 = - [4(339-400)^3 + (-16000 + 20340 - 4158)^2] / 27 = - [-907924 + 33124] / 27 = 32400$$

2. Определяем значение $D_2 = - 2(3c - b^2)$

$$\rightarrow D_2 = -2(3 \cdot 113 - 400) = 122 = 3^2 + 7^2 + 8^2 = 4^2 + 5^2 + 9^2$$

Здесь имеет место два представления числа 122 в виде суммы трех квадратов. Поэтому, проверяем на соответствие с числом $D_1 = 32400$.

2.1 $3^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 = 28224 \neq 32400$

2.2 $4^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2 = 32400$. Этот вариант подходит!

$$\begin{aligned} \rightarrow (2mn)_{11} &= 4, (2mn)_{12} = -4, \\ (2mn)_{21} &= 5, (2mn)_{22} = -5, \\ (2mn)_{31} &= 9, (2mn)_{32} = -9. \end{aligned}$$

3. Определяем значение нулей (корней) исходного уравнения

3.1 $3x^2 + 2bx + c = -(2mn)_{11}(2mn)_{21}$

$$\rightarrow 3x^2 - 40x + 113 = -4 \cdot 5 \rightarrow 3x^2 - 40x + 133 = 0.$$

$$\rightarrow X_1 = 7, X_2 = \frac{19}{3}$$

4. Таким образом, определен один из корней исходного кубического уравнения $X_1 = 7$, и кроме того, известны значения $(2mn)_{11} \div (2mn)_{32}$. Этих данных достаточно для определения двух остальных корней.

4.1 Пусть $(2mn)_{11} = 4 = (X_1 - X_2) \rightarrow X_2 = X_1 - 4 = 7 - 4 = 3$. Нет решения (это не корень).

4.2 Пусть $(2mn)_{12} = -4 = (X_1 - X_2) \rightarrow X_2 = X_1 + 4 = 7 + 4 = 11$. Это второй корень.

4.3 Пусть $(2mn)_{21} = 5 = (X_2 - X_3) \rightarrow X_3 = X_2 - 5 = 7 - 5 = 2$. Это третий корень.

Решением исходного уравнения будет $X_1 = 7, X_2 = 2, X_3 = 11$.

Расчет закончен !

Пример 3 Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

$$x^3 - 10x^2 - 49x + 130 = 0$$

где $a=1, b=-10, c=-49, d=130$

Решение

1. Определяем значение $D_1 = -\frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

$$\rightarrow D_1 = -[4(-147 - 100)^3 + (2000 + 4410 - 3510)^2] / 27 = -[-60276892 + 8410000] / 27 = 1920996$$

2. Определяем значение $D_2 = -2(3c - b^2)$

$$\rightarrow D_2 = -2(-147 - 100) = 494 = 1^2 + 3^2 + 22^2 = 2^2 + 7^2 + 21^2 = 7^2 + 11^2 + 18^2$$

Из этих трех вариантов представления числа 494 в виде суммы трех квадратов подходит последний вариант, т.к. $7^2 \cdot 11^2 \cdot 18^2 = 1920996$

$$\begin{aligned} \rightarrow (2mn)_{11} &= 7, (2mn)_{12} = -7, \\ (2mn)_{21} &= 11, (2mn)_{22} = -11, \\ (2mn)_{31} &= 18, (2mn)_{32} = -18. \end{aligned}$$

3. Определяем значение нулей (корней) исходного уравнения

3.1 $3x^2 + 2bx + c = -(2mn)_{11}(2mn)_{21}$

$$\rightarrow 3x^2 - 20x - 49 = 7 \cdot 11 \rightarrow 3x^2 - 20x - 126 = 0. \text{ Эти значения } X \text{ не подходят!}$$

3.2 $3x^2 + 2bx + c = (2mn)_{11}(2mn)_{22}$

$$\rightarrow 3x^2 - 20x - 49 = -77 \rightarrow 3x^2 - 20x + 28 = 0.$$

$$\rightarrow X_1 = \frac{14}{3}, X_2 = 2 - \text{это один из корней исходного уравнения!}$$

4. Таким образом, определен один из корней исходного кубического уравнения $X_1 = 2$, и кроме того, известны значения $(2mn)_{11} \div (2mn)_{32}$. Этих данных достаточно для определения двух остальных корней.

4.1 Пусть $(2mn)_{11} = 7 = (X_1 - X_2) \rightarrow X_2 = X_1 - 7 = 2 - 7 = -5$. Это второй корень!

4.2 Пусть $(2mn)_{12} = -7 = (X_1 - X_2) \rightarrow X_2 = X_1 + 7 = 2 + 7 = 9$. Это не корень.

4.3 Пусть $(2mn)_{21} = 11 = (X_1 - X_3) \rightarrow X_3 = X_1 - 11 = 2 - 11 = -9$. Это не корень.

4.4 Пусть $(2mn)_{21} = -11 = (X_1 - X_3) \rightarrow X_3 = X_1 + 11 = 2 + 11 = 13$. Это третий корень!

Решением исходного уравнения будет $X_1 = 2, X_2 = -5, X_3 = 13$.

Расчет закончен !

Пример 4 Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

$$x^3 - 6.85x^2 + 13.425x - 8.1 = 0$$

где $a=1, b = -6.85, c = 13.425, d = -8.1$

В этом уравнении имеют место нецелые значения коэффициентов. Это указывает на то, что и корни также могут иметь нецелые значения.

Решение

1. Определяем значение $D_1 = -\frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

$$\rightarrow D_1 = -[4(40.275 - 46.9225)^3 + (-642.83825 + 827.65125 - 218.7)^2] / 27$$

$$\rightarrow D_1 = -[-1174.9923236875 + 1148.328769] / 27 = 0.987539062500$$

2. Определяем значение $D_2 = -2(3c - b^2)$

$$\rightarrow D_2 = -2(40.275 - 46.9225) = 13.2950$$

В этом случае имеют место дробные значения для D_1 и D_2 . Предлагаемый метод решения куб. уравнения оперирует только с целыми числами, поэтому необходимо умножить на 10^k .

При этом значение степени k должно определяться

- для D_2 числом знаков в мантиссе (для данного примера $k_2 = 4$)

- для $D_1 = 3 \cdot$ (число знаков в мантиссе для D_2). $\rightarrow k_1 = 3 \cdot k_2$ (для данного примера $k_1 = 12$).

Для дальнейшего рассмотрения используем два числа

$$- D_{11} = 987539062500$$

$$- D_{21} = 132950.$$

3. Далее задача заключается в том, чтобы определить три значения таких целых чисел (A, B, D), при которых выполняются равенства $D_{21} = A^2 + B^2 + D^2$ и $D_{11} = A^2 \cdot B^2 \cdot D^2$.

Для нахождения значений чисел A, B, D можно использовать две методики

- найти все варианты представления числа D_{21} в виде суммы трех квадратов. При этом один из этих вариантов будет соответствовать условию $D_{21} = A^2 + B^2 + D^2$ и $D_{11} = A^2 \cdot B^2 \cdot D^2$.

- найти все варианты представления числа D_{11} в виде произведения трех квадратов. При этом один из этих вариантов будет соответствовать условию $D_{21} = A^2 + B^2 + D^2$ и $D_{11} = A^2 \cdot B^2 \cdot D^2$. Вариант $D_{11} = A^2 \cdot B^2 \cdot D^2$ следует считать более удобным.

Для рассматриваемого примера

$$D_{11} = 987539062500 = 250^2 \cdot 265^2 \cdot 15^2$$

$$D_{21} = 132950 = 250^2 + 265^2 + 15^2.$$

4. В расчетах п.2 была произведена операция перехода к целым числам путем умножения соответствующих чисел на множители k_1 и k_2 . Совершая обратную операцию, получим

$$(2mn)_{11} = 2.5, (2mn)_{12} = -2.5,$$

$$(2mn)_{21} = 2.65, (2mn)_{22} = -2.65,$$

$$(2mn)_{31} = 0.15, (2mn)_{32} = -0.15.$$

5. Определяем значение нулей (корней) исходного уравнения

$$5.1 \quad 3x^2 + 2bx + c = -(2mn)_{11}(2mn)_{21}$$

$$\rightarrow 3x^2 - 2 \cdot (6.85) \cdot x + 13.425 = (2.5) \cdot (-2.65) \rightarrow 3x^2 - 13.7x + 6.8 = 0.$$

$$\rightarrow X_1 = 4 - \text{это один из корней исходного уравнения!}$$

6. Таким образом, определен один из корней исходного кубического уравнения $X_1 = 4$, и кроме того, известны значения $(2mn)_{11} \div (2mn)_{32}$. Этих данных достаточно для определения двух остальных корней.

6.1 Пусть $(2mn)_{11} = 2.5 = (X_1 - X_2) \rightarrow X_2 = X_1 - 2.5 = 4 - 2.5 = 1.5$. Это второй корень!

6.2 Пусть $(2mn)_{12} = -2.5 = (X_1 - X_2) \rightarrow X_2 = X_1 + 2.5 = 4 + 2.5 = 6.5$. Это не корень.

6.3 Пусть $(2mn)_{21} = 2.65 = (X_1 - X_3) \rightarrow X_3 = X_1 - 2.65 = 4 - 2.65 = 1.35$. Это третий корень!

Решением исходного уравнения будет $X_1 = 4, X_2 = 1.5, X_3 = 1.35$.

Расчет закончен !

Неприводимый случай формулы Кардана

Если для кубического уравнения имеет место случай одного действительного и двух мнимых сопряженных корней, то такой вариант называют неприводимым случаем формулы Кардана.

Рассмотрим неприводимый случай формулы Кардана с позиций системы mn параметров.

Задача "Задано кубическое уравнение вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Известно, что нули этого уравнения имеют один действительный и два мнимых сопряженных корня. Используя формулы системы mn параметров предложить метод определения нулей исходного уравнения".

Пусть $a = 1$.

Решение

Ранее было показано, что для любого кубического уравнения имеют место формулы

$$D_1 = - (2mn)_1^2 (2mn)_2^2 (2mn)_3^2$$

$$D_2 = - [(2mn)_1^2 + (2mn)_2^2 + (2mn)_3^2],$$

где

- $(2mn)_j$ - разность любой пары корней исходного уравнения

$$- D_1 = - \frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$$

$$- D_2 = - 2(3c - b^2)$$

- (b, c, d) – коэффициенты исходного уравнения.

По условиям задачи имеем один действительный корень (обозначим его $X_1 = g_1$) и два сопряженных мнимых корня $X_2 = (g_2 - hi)$, $X_3 = (g_2 + hi)$. Тогда

$$(2mn)_1 = (X_1 - X_2) = (g_1 - g_2) + hi$$

$$(2mn)_2 = (X_1 - X_3) = (g_1 - g_2) - hi$$

$$(2mn)_3 = (X_2 - X_3) = g_2 - hi - g_2 - hi = - 2hi$$

$$\rightarrow D_1 = - (2mn)_1^2 \cdot (2mn)_2^2 \cdot (2mn)_3^2 = - [(g_1 - g_2) + hi]^2 \cdot [(g_1 - g_2) - hi]^2 \cdot [2 hi]^2$$

$$\rightarrow D_1 = [(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 \cdot 4h^2$$

Обратим внимание на то, что в этой формуле в квадратных скобках имеют место - знак "+"

- только действительные числа.

Таким образом, метод решения поставленной задачи заключается в следующем

1. На основании значений коэффициентов исходного уравнения по формулам

$$D_1 = - \frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$$

$$D_2 = - 2(3c - b^2)$$

определяются значения D_1 и D_2 .

2. Определяются D_1 - как произведение двух квадратов
 D_2 - как удвоенная сумма двух квадратов.

3. Определяются значения g_1, g_2, h .

4. Определяются значения $(2mn)_{11}, (2mn)_{21}, (2mn)_{31}$

5. Определяются значения корней исходного уравнения.

Пример 5 Решить уравнение с помощью формул системы тп параметров

$$x^3 - 9x^2 + 73x - 265 = 0$$

где $a=1, b=-9, c=73, d=-265$

В этом уравнении имеет место неприводимый случай формулы Кардана.

Решение

1. Определяем значение $D_1 = - \frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

$$\rightarrow D_1 = - [4(219 - 81)^3 + (-1458 + 5913 - 7155)^2] / 27 = - [10512288 + 7290000] / 27 = -659344$$

2. Для дальнейших расчетов общий знак “-” не имеет значения, поэтому будем рассматривать D_1 как положительную величину.

$$\rightarrow D_1 = [(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 \cdot 4h^2 = 659344 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 29 = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 29 = 4 \cdot 7^2 \cdot 58^2$$

Здесь число 659344 представлено в виде всех сомножителей с целью наглядности формирования множителей в соответствии с формулой $[(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 \cdot 4h^2$. Тогда можно записать

$$h = 7, (g_1 - g_2)^2 + h^2 = 58 \rightarrow (g_1 - g_2)^2 = 58 - 49 = 9 \rightarrow (g_1 - g_2) = \pm 3$$

3. Для определения g_1 и g_2 воспользуемся свойством корней исходного уравнения

$$-b = X_1 + X_2 + X_3 \rightarrow -(-9) = g_1 + g_2 + hi + g_2 - hi = g_1 + 2g_2 \rightarrow 9 = g_1 + 2g_2.$$

4. Теперь, имея два уравнения $(g_1 - g_2) = \pm 3$ и $(g_1 + 2g_2) = 9$, можно определить значения g_1 и g_2

$$\text{Пусть } (g_1 - g_2) = 3 \rightarrow g_2 = g_1 - 3 \rightarrow g_1 + 2(g_1 - 3) = 9 \rightarrow 3g_1 = 15 \rightarrow g_1 = 5 \rightarrow g_2 = 2.$$

\rightarrow

$$X_1 = 5, X_2 = 2 + 7i, X_3 = 2 - 7i$$

Расчет закончен !

Пример 6 Решить уравнение с помощью формул системы тп параметров

$$x^3 - 30x^2 + 322x - 1168 = 0$$

где $a=1, b=-30, c=322, d=-1168$

В этом уравнении имеет место неприводимый случай формулы Кардана.

Решение

1. Определяем значение $D_1 = - \frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

$$\rightarrow D_1 = - [4(966 - 900)^3 + (-54000 + 86940 - 31536)^2] / 27 = - [1149984 + 1971216] / 27 = -115600$$

2. Для дальнейших расчетов общий знак “-” не имеет значения, поэтому будем рассматривать D_1 как положительную величину.

$$\rightarrow D_1 = [(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 \cdot 4h^2 = 115600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 17 = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 17 = 4 \cdot 5^2 \cdot 34^2$$

Здесь число 115600 представлено в виде всех сомножителей с целью наглядности формирования множителей в соответствии с формулой $[(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 \cdot 4h^2$. Тогда можно записать

$$h = 5, (g_1 - g_2)^2 + h^2 = 34 \rightarrow (g_1 - g_2)^2 = 34 - 25 = 9 \rightarrow (g_1 - g_2) = \pm 3$$

3. Для определения g_1 и g_2 воспользуемся свойством корней исходного уравнения

$$-b = X_1 + X_2 + X_3 \rightarrow -(-30) = g_1 + g_2 + hi + g_2 - hi = g_1 + 2g_2 \rightarrow 30 = g_1 + 2g_2.$$

4. Теперь, имея два уравнения $(g_1 - g_2) = \pm 3$ и $(g_1 + 2g_2) = 30$, можно определить значения g_1 и g_2

$$\text{Пусть } (g_1 - g_2) = -3 \rightarrow g_2 = g_1 - 3 \rightarrow g_1 + 2(g_1 - 3) = 30 \rightarrow 3g_1 = 24 \rightarrow g_1 = 8 \rightarrow g_2 = 11.$$

\rightarrow

$$X_1 = 8, X_2 = 11 + 5i, X_3 = 2 - 5i$$

Расчет закончен !

Новый метод решения кубических уравнений

Из анализа результатов вышеприведенных примеров можно предложить новый метод решения кубических уравнений. Для корней кубического уравнения могут иметь место следующие случаи

- три корня имеют одинаковые действительные значения

- три корня имеют действительные значения, при этом два из них являются сопряженными, т.е. если $X_1 = g + h$, то $X_2 = g - h$

или $X_1 = \frac{1}{2}(g + h)$, то $X_2 = \frac{1}{2}(g - h)$, Наличие множителя $\frac{1}{2}$ обусловлено численным значением коэффициента b при X для $X^3 + bX^2 + cX + d = (X - X_1) \cdot (X^2 + bX + c) = 0$.

- один корень имеет действительное значение, два других- комплексные и сопряженные, т.е. если $X_1 = g + ih$, то $X_2 = g - ih$.

Первый случай – тривиальный. $(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0$. Определение корней для остальных случаев является непростой задачей.

Три разных действительных корня

Пусть имеем один действительный корень (обозначим его $X_1 = g_1$) и два сопряженных действительных корня. Если исходное уравнение разделить на разность $(X - g_1)$, то получим квадратное уравнение вида

$$[X - (g_2 + h)] \cdot [X - (g_2 - h)] = 0$$

$$\rightarrow X^2 - 2g_2X + (g_2^2 - h^2) = 0$$

$$\rightarrow X_1 = g_1, X_{2,3} = g_2 \pm h \rightarrow X_2 = (g_2 - h), X_3 = (g_2 + h)$$

$$\rightarrow (2mn)_1 = (X_1 - X_2) = (g_1 - g_2) + h$$

$$(2mn)_2 = (X_1 - X_3) = (g_1 - g_2) - h$$

$$(2mn)_3 = (X_2 - X_3) = g_2 - h - g_2 - h = -2h$$

$$\rightarrow D_1 = - (2mn)_1^2 \cdot (2mn)_2^2 \cdot (2mn)_3^2 = - [(g_1 - g_2) + h]^2 \cdot [(g_1 - g_2) - h]^2 \cdot [2h]^2$$

$$\rightarrow D_1 = [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 \cdot 4h^2 \quad (3)$$

$$\rightarrow D_2 = - [(2mn)_1^2 + (2mn)_2^2 + (2mn)_3^2] = - [(g_1 - g_2) + h]^2 + [(g_1 - g_2) - h]^2 + 4h^2$$

$$\rightarrow D_2 = - [(g_1 - g_2)^2 + 2(g_1 - g_2) \cdot h + h^2 + (g_1 - g_2)^2 - 2(g_1 - g_2) \cdot h + h^2 + 4h^2]$$

$$\rightarrow D_2 = - [2(g_1 - g_2)^2 + 6h^2] = - 2[(g_1 - g_2)^2 + 3h^2] \quad (8)$$

На основании формул системы mn параметров имеем

$$D_1 = - \frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27} \quad (4)$$

$$D_2 = - 2(3c - b^2), \quad (5)$$

где b, c, d - коэффициенты исходного кубического уравнения.

Три действительных корня и два одинаковых

Пусть имеем один действительный корень (обозначим его $X_1 = g_1$) и два равных действительных корня. Тогда имеем $h = 0$ и $(2mn)_1 = 0$

При $(2mn)_1 = 0$ на основании уравнения (1) будем иметь

$$3x^2 + 2bx + c = 0 \quad (6)$$

$$\rightarrow X_2 = (g_2 - h), X_3 = (g_2 + h) \rightarrow X_2 = X_3 = g_2$$

$$\rightarrow (2mn)_1 = (X_1 - X_2) = (g_1 - g_2)$$

$$(2mn)_2 = (X_1 - X_3) = (g_1 - g_2)$$

$$(2mn)_3 = (X_2 - X_3) = g_2 - g_2 = 0$$

$$\rightarrow D_1 = - (2mn)_1^2 \cdot (2mn)_2^2 \cdot (2mn)_3^2 = 0$$

$$\rightarrow D_2 = - [(2mn)_1^2 + (2mn)_2^2 + (2mn)_3^2] = - [(2mn)_1^2 + (2mn)_2^2]$$

$$\rightarrow D_2 = 2(2mn)_1^2 = 2(g_1 - g_2)^2 = - 2(3c - b^2) = 2(b^2 - 3c)$$

$$\rightarrow (g_1 - g_2)^2 = (b^2 - 3c)$$

На основании свойств корней исходного уравнения можно записать - $b = X_1 + 2X_2$

$$\rightarrow g_1 + 2g_2 = -b$$

Решая систему из двух уравнений будем иметь $g_2 = - \frac{b + g_1}{2}$

$$\rightarrow X_{11,12} = g_{11,12} = \frac{1}{3}[-b \pm 2\sqrt{b^2 - 3c}]$$

$$\rightarrow X_{21,22} = g_{21,22} = \frac{1}{3}[-b \pm \sqrt{b^2 - 3c}]$$

Расчет закончен !

Пример 7 Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

$$x^3 - 41x^2 + 475x - 1083 = 0$$

где $a = 1, b = -41, c = 475, d = -1083$

$$1. X_{11,12} = g_{11,12} = \frac{1}{3}[-b \pm 2\sqrt{b^2 - 3c}] \rightarrow X_{11,12} = \frac{1}{3}[41 \pm 2\sqrt{41^2 - 3 \cdot 475}] = \frac{1}{3}[41 \pm 2 \cdot 16]$$

$$\rightarrow X_{11} = \frac{73}{3}, \quad X_1 = 3$$

$$X_{21,22} = g_{21,22} = \frac{1}{3}[-b \pm \sqrt{b^2 - 3c}] \rightarrow g_{21,22} = \frac{1}{3}[41 \pm \sqrt{41^2 - 3 \cdot 475}] = \frac{1}{3}[41 \pm 16]$$

$$\rightarrow X_{21} = 19, X_{22} = \frac{25}{3} \rightarrow X_2 = X_3 = 19$$

Расчет закончен !

Вывод основных формул

Задано исходное уравнение $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Необходимо найти значения корней.

1. Определяем значение $D_1 = -\frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

2. Разделим $\frac{D_1}{4}$

3. Представляем число $\frac{D_1}{4}$ в виде произведения двух квадратов $\frac{D_1}{4} = [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 \cdot h^2$.

4. Меньший множитель принимаем за $h^2 \rightarrow [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 = \frac{D_1}{4h^2}$

$$\rightarrow (g_1 - g_2) = \pm \sqrt{\frac{\pm \sqrt{D_1}}{2h} + h^2} \quad (6)$$

5. Для получения второго уравнения используем свойство корней исходного уравнения

Из исходного уравнения $b = -(X_1 + X_2 + X_3) \rightarrow b = -(g_1 + g_2 - h + g_2 + h)$

$$\rightarrow b = -(g_1 + 2g_2) \quad (7)$$

6. Решая систему из двух уравнений (26) и (27) в итоге получим

$$X_1 = g_1 = \frac{1}{3}(\pm 2\sqrt{\frac{\pm \sqrt{D_1}}{2h} + h^2} - b)$$

$$\rightarrow X_{11} = g_{11} = \frac{1}{3}(2\sqrt{\frac{\pm \sqrt{D_1}}{2h} + h^2} - b) \quad (8)$$

$$\rightarrow X_{12} = g_{12} = \frac{1}{3}(-2\sqrt{\frac{\pm \sqrt{D_1}}{2h} + h^2} - b) \quad (9)$$

Таким образом получили значение одного из корней исходного уравнения.

7. $\rightarrow g_2 = -\frac{b+g_1}{2}$

$$\rightarrow g_{21} = -\frac{b+g_{11}}{2}$$

$$\rightarrow g_{22} = -\frac{b+g_{12}}{2}$$

8. Определяем два остальных корня

$$X_{21} = g_{21} + h$$

$$X_{22} = g_{22} + h$$

$$X_{31} = g_{21} - h$$

$$X_{32} = g_{22} - h$$

Этими формулами определены по два варианта каждого из трех корней. Среди этих вариантов имеют место и корни исходного кубического уравнения.

Задача решена!

Пример 8 Решить уравнение с помощью формул системы mп параметров

$$x^3 - 33x^2 + 311x - 663 = 0$$

где $a = 1, b = -30, c = 322, d = -1168$

Решение

1. Определяем значение $D_1 = -\frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

→ $D_1 = -\frac{4(933 - 1089)^3 + (-71874 + 92367 - 17901)^2}{27} = -\frac{[-15185664 + 6718464]}{27} = 313600$

→ $D_1 = [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 \cdot 4h^2 = 313600 = 4 \cdot 4^2 \cdot 7^2 \cdot 10^2 = 4 \cdot 40^2 \cdot 7^2 = 4 \cdot 70^2 \cdot 4^2 = 4 \cdot 28^2 \cdot 10^2$
 $313600 = 4 \cdot 140^2 \cdot 2^2 = 4 \cdot 7^2 \cdot 40^2 = 4 \cdot 5^2 \cdot 56^2$

→ $\frac{D_1}{4} = 40^2 \cdot 7^2 = 70^2 \cdot 4^2 = 28^2 \cdot 10^2 = 140^2 \cdot 2^2 = 5^2 \cdot 56^2$

2.

Пусть $h_1^2 = 7^2$

→ $X_1 = g_{11} = \frac{1}{3} \left(2 \sqrt{\frac{\pm \sqrt{D_1}}{2h} + h^2} - b \right) = \frac{1}{3} \left(2 \sqrt{\frac{\pm \sqrt{313600}}{14} + 7^2} - b \right) = \frac{1}{3} \cdot (\pm 6 + 33)$

→ $g_{11} = X_{11} = 13, \quad X_{12} = 9.$

→ $g_{21} = -\frac{b + g_{11}}{2} = -\frac{-33 + 13}{2} = 10$

→ $X_{2,3} = g_{21} + h_1 = 10 \pm 7 \rightarrow X_2 = 17, X_3 = 3$

Задача решена!

Неприводимый случай формулы Кардана

Пусть имеем один действительный корень (обозначим его $X_1 = g_1$) и два мнимых сопряженных корня

$X_2 = (g_2 - ih), X_3 = (g_2 + ih).$

→ $(2mn)_1 = (X_1 - X_2) = (g_1 - g_2) + ih$

$(2mn)_2 = (X_1 - X_3) = (g_1 - g_2) - ih$

$(2mn)_3 = (X_2 - X_3) = g_2 - ih - g_2 - ih = -2ih$

Задано исходное уравнение $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Необходимо найти значения корней.

1. Определяем значение $D_1 = -\frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$

2. Разделим $\frac{D_1}{4}$

3. Представляем число $\frac{D_1}{4}$ в виде произведения двух квадратов $\frac{D_1}{4} = [(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 \cdot h^2$.

4. Меньший множитель принимаем за $h^2 \rightarrow [(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 = \frac{D_1}{4h^2}$

→ $(g_1 - g_2) = \pm \sqrt{\frac{\pm \sqrt{D_1}}{2h} - h^2}$

5. Для получения второго уравнения используем свойство корней исходного уравнения

Из исходного уравнения $b = -(X_1 + X_2 + X_3) \rightarrow b = -(g_1 + g_2 - ih + g_2 + ih)$

→ $b = -(g_1 + 2g_2)$

6. $X_1 = g_1 = \frac{1}{3} \left(\pm 2 \sqrt{\frac{\pm \sqrt{D_1}}{2h} - h^2} - b \right)$

→ $X_{11} = g_{11} = \frac{1}{3} \left(2 \sqrt{\frac{\pm \sqrt{D_1}}{2h} - h^2} - b \right)$

→ $X_{12} = g_{12} = \frac{1}{3} \left(-2 \sqrt{\frac{\pm \sqrt{D_1}}{2h} - h^2} - b \right)$

7. → $g_2 = -\frac{b + g_1}{2}$

→ $g_{21} = -\frac{b + g_{11}}{2}$

$$\rightarrow g_{22} = -\frac{b+g_{12}}{2}$$

8. Определяем два остальных корня

$$X_{21} = g_{21} + h$$

$$X_{22} = g_{22} + h$$

$$X_{31} = g_{21} - h$$

$$X_{32} = g_{22} - h$$

Пример 9 Решить уравнение с помощью формул системы mp параметров

$$x^3 - 6x^2 + 58x - 200 = 0$$

где $a=1, b=-6, c=58, d=-200$

Решение

$$1. \text{ Определяем значение } D_1 = -\frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$$

$$\rightarrow D_1 = -[4(174 - 36)^3 + (-432 + 3132 - 5400)^2]/27 = -[10512288 + 7290000]/27 = 659344$$

$$\rightarrow D_1 = [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 \cdot 4h^2 = 659344 = 4 \cdot 2^2 \cdot 7^2 \cdot 29^2 = 4 \cdot 14^2 \cdot 29^2 = 4 \cdot 7^2 \cdot 58^2 = 4 \cdot 2^2 \cdot 203^2$$

$$\rightarrow \frac{D_1}{4} = 203^2 \cdot 2^2 = 58^2 \cdot 7^2 = 29^2 \cdot 14^2$$

$$\text{Пусть } h_1^2 = 7^2$$

$$\rightarrow X_1 = g_{11} = \frac{1}{3} \left(2 \sqrt{\frac{\sqrt{D_1}}{2h}} - h^2 - b \right) = \frac{1}{3} \left(2 \sqrt{\frac{\sqrt{659344}}{14}} - 7^2 + 6 \right) = \frac{1}{3} \cdot (6 + 6) = 4$$

$$\rightarrow X_1 = 4$$

$$\rightarrow g_{21} = -\frac{b+g_{11}}{2} = -\frac{-6+4}{2} = 1$$

$$\rightarrow X_{2,3} = g_{21} + ih_1 = 1 \pm 7i \rightarrow X_2 = 1 - 7i, X_3 = 1 + 7i$$

Задача решена!

Пример 10

Дано уравнение

$$x^3 - 6x^2 + 21x - 52 = 0$$

где $a=1, b=-6, c=21, d=-52$

Решить уравнение с помощью формул системы mp параметров

Решение

$$1. \text{ Определяем значение } D_1 = -\frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$$

$$\rightarrow D_1 = -[4(63 - 36)^3 + (-432 + 1134 - 1404)^2]/27 = -[78732 + 492804]/27 = 21168$$

$$\rightarrow D_1 = [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 \cdot 4h^2 = 21168 = 4 \cdot 2^2 \cdot 7^2 \cdot (\sqrt{27})^2 = 4 \cdot 14^2 \cdot (\sqrt{27})^2 = 4 \cdot (6\sqrt{3})^2 \cdot 7^2$$

$$\rightarrow D_1 = 4 \cdot 21^2 \cdot (2\sqrt{3})^2$$

$$\text{Пусть } h_1^2 = (2\sqrt{3})^2$$

$$\rightarrow X_1 = g_{11} = \frac{1}{3} \left(2 \sqrt{\frac{\sqrt{D_1}}{2h}} - h^2 - b \right) = \frac{1}{3} \left(2 \sqrt{\frac{\sqrt{21168}}{4\sqrt{3}}} - (2\sqrt{3})^2 + 6 \right) = \frac{1}{3} \cdot (6 + 6) = 4$$

$$\rightarrow X_1 = 4$$

$$\rightarrow g_{21} = -\frac{b+g_{11}}{2} = -\frac{-6+4}{2} = 1$$

$$\rightarrow X_{2,3} = g_{21} + ih_1 = 1 \pm 2i\sqrt{3} \rightarrow X_2 = 1 + 2i\sqrt{3}, X_3 = 1 - 2i\sqrt{3}$$

Сравните метод решения и результат с первоисточником.

[И.Н.Бронштейн. К. А.Семендяев.Справочник по математике. М. Наука.1980. Стр. 220]

Вывод новых формул

Основные свойства корней квадратного и кубического уравнений выражаются известными формулами Виета. Использование системы mn параметров дает возможность получения новых, ранее неизвестных, формул отражающих свойства корней указанных уравнений.

Рассмотрим кубическое уравнение и проведем анализ формулы (1)

$$(2mn)^2 + (3x + b)(2mn) + 3x^2 + 2bx + c = 0$$

Если в это уравнение подставить значение любого из корней исходного кубического уравнения, то получим

$$(2mn)^2 + (3x_i + b)(2mn) + 3x_i^2 + 2bx_i + c = 0$$

$$\rightarrow (2mn)^2 + (3x_1 + b)(2mn) + 3x_1^2 + 2bx_1 + c = 0$$

$$\rightarrow (2mn)^2 + (3x_2 + b)(2mn) + 3x_2^2 + 2bx_2 + c = 0$$

$$\rightarrow (2mn)^2 + (3x_3 + b)(2mn) + 3x_3^2 + 2bx_3 + c = 0$$

Таким образом, исходное кубическое уравнение распадается на три квадратных уравнения. При этом для каждого положительного значения $(2mn)_i$ обязательно найдется отрицательное значение $(2mn)_j$. Поэтому общая сумма всех корней вида $(2mn)$ будет равна нулю.

$$\rightarrow (3x_1 + b) + (3x_2 + b) + (3x_3 + b) = 0 \rightarrow 3(x_1 + x_2 + x_3) = -3b$$

$$\rightarrow (x_1 + x_2 + x_3) = -b.$$

Таким образом получили строгое доказательство одного из уравнений Виета.

Рассмотрим любых два уравнения, например,

$$\rightarrow (2mn)^2 + (3x_1 + b)(2mn) + 3x_1^2 + 2bx_1 + c = 0$$

$$(2mn)^2 + (3x_2 + b)(2mn) + 3x_2^2 + 2bx_2 + c = 0.$$

Здесь в качестве свободных членов имеем $3x_1^2 + 2bx_1 + c$ и $3x_2^2 + 2bx_2 + c$. Их сумма равна

$$\rightarrow \Sigma = 3(x_1^2 + 3x_2^2) + 2b(x_1 + x_2) + 2c. \text{ Расчеты показывают, что}$$

$$3(x_1^2 + x_2^2) + 2b(x_1 + x_2) + 2c = (x_1 - x_2)^2$$

$$\rightarrow (x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) + c - x_1 \cdot x_2 = 0$$

Тогда для трех корней исходного уравнения будем иметь

$$\rightarrow (x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) + c - x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\rightarrow (x_1 + x_3)^2 + b(x_1 + x_3) + c - x_1 \cdot x_3 = 0$$

$$\rightarrow (x_2 + x_3)^2 + b(x_2 + x_3) + c - x_2 \cdot x_3 = 0$$

Это новые формулы, отражающие свойства корней исходного кубического уравнения!

В общем случае эта формула имеет вид

$$(x_i + x_j)^2 + b(x_i + x_j) + c - x_i \cdot x_j = 0 \quad (10)$$

Пример 11 Проверить формулу (10)

$$x^3 - 20x^2 + 113x - 154 = 0$$

$$\text{где } a=1, b=-20, c=113, d=-154$$

Здесь $X_1 = 7, X_2 = 2, X_3 = 11$.

$$\rightarrow (x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) + c - x_1 \cdot x_2 = 0 \rightarrow (7 + 2)^2 - 20(7 + 2) + 113 - 7 \cdot 2 = 0$$

$$\rightarrow (x_1 + x_3)^2 + b(x_1 + x_3) + c - x_1 \cdot x_3 = 0 \rightarrow (7 + 11)^2 - 20(7 + 11) + 113 - 7 \cdot 11 = 0$$

$$\rightarrow (x_2 + x_3)^2 + b(x_2 + x_3) + c - x_2 \cdot x_3 = 0 \rightarrow (2 + 11)^2 - 20(2 + 11) + 113 - 2 \cdot 11 = 0$$

Расчет подтверждает верность формулы (10).

Три действительных корня и два одинаковых

При наличии двух одинаковых корней имеет место нулевая разность, т.е. $(2mn) = 0$.

Тогда из уравнения (2) следует $3x_1^2 + 2bx_1 + c = 0$. Подставив значения коэффициентов b и c и решив это уравнение получим значение корня- дубля.

Пример 12 Пусть имеем в качестве исходного уравнение $x^3 - 25x^2 + 203x - 539 = 0$.

Необходимо найти решения данного уравнения.

Решение Допустим, что для данного уравнения имеют место два одинаковых корня. Тогда имеем $3x_1^2 + 2bx_1 + c = 0 \rightarrow 3x_1^2 - 50x_1 + 203 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{3}(25 \pm \sqrt{625 - 609}) \rightarrow x_1 = \frac{29}{3}, x_2 = 7$.

Подставив значение $x = 7$ в исходное уравнение, убеждаемся, что это один из корней- дубля исходного уравнения. Определить третий корень исходного уравнения не представляет особого труда. Таким образом, решением заданного исходного уравнения является

$$X_1 = X_2 = 7, X_3 = 11$$

Три действительных и одинаковых корня

В этом случае имеем для всех $(2mn) = 0$. Из уравнений (46), (47), (48) получим $3x_1^2 + 2bx_1 + c = 0$.

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{3}(-b \pm \sqrt{b^2 - 3c}). \text{ При равенстве трех корней имеем } \sqrt{b^2 - 3c} = 0$$

$$\rightarrow x_{1,2,3} = -\frac{b}{3}.$$

Эту формулу можно получить и более просто. На основании формулы Виета

$$\rightarrow (x_1 + x_2 + x_3) = -b. \text{ При } x = x_1 = x_2 = x_3 \rightarrow 3x = -b \rightarrow x = -\frac{b}{3}.$$

Пример 12

Дано уравнение

$$x^3 - 24x^2 + 183x - 448 = 0 \rightarrow b = -24, c = 183, d = -448$$

Решить уравнение с помощью формул системы mn параметров

Решение

$$1. \text{ Определяем значение } D_1 = -\frac{4 \cdot (3c - b^2)^3 + (2 \cdot b^3 - 9bc + 27d)^2}{27}$$

$$\rightarrow D_1 = -[4(549 - 576)^3 + (-27648 + 39528 - 12096)^2]/27 = -[-78732 + 46656]/27 = 1188$$

$$\rightarrow 1188 = 4 \cdot 9 \cdot 33 = 4 \cdot 36 \cdot \frac{33}{4}$$

$$2. \text{ Пусть } h^2 = \frac{33}{4}$$

$$\rightarrow \frac{D_1}{4} = [(g_1 - g_2)^2 - h^2]^2 \cdot h^2 \rightarrow [(g_1 - g_2)^2 + h^2]^2 = 36 \rightarrow [(g_1 - g_2)^2 - h^2] = \pm 6$$

$$\rightarrow (g_1 - g_2)^2 = -6 + \frac{33}{4} = \frac{9}{4} \rightarrow g_1 - g_2 = \pm \frac{3}{2}.$$

$$\text{Второе уравнение } (x_1 + x_2 + x_3) = -b \rightarrow (g_1 + g_2 + h + g_2 - h) = -b \rightarrow g_1 + 2g_2 = 24$$

Таким образом, имеем два уравнения $g_1 - g_2 = \pm \frac{3}{2}$ и $g_1 = 24 - 2g_2$.

$$\rightarrow 24 - 2g_2 - g_2 = \pm \frac{3}{2} \rightarrow g_2 = \frac{48 \pm 3}{6} = \frac{51}{6} \rightarrow g_2 = \frac{17}{2} \rightarrow g_1 = 24 - 2g_2 \rightarrow g_1 = 24 - 17 \rightarrow g_1 = 7$$

$$\rightarrow x_1 = 7, x_2 = \frac{1}{2}(17 + \sqrt{33}), x_3 = \frac{1}{2}(17 - \sqrt{33})$$

Задача решена!

Внимание! В данном примере имеет место множитель $\frac{1}{2}$ в значениях x_2 и x_3 . Этот случай обусловлен следующим

1. Разделим исходное уравнение $x^3 - 24x^2 + 183x - 448 = 0$ на $(x - 7)$

$$\rightarrow \frac{x^3 - 24x^2 + 183x - 448}{x-7} = -x^2 + 17x - 64 \rightarrow x^3 - 24x^2 + 183x - 448 = (x - 7) \cdot (x^2 - 17x + 64) = 0.$$

2. В уравнении $x^2 - 17x + 64 = 0$ при x имеем нечетный коэффициент равный 17. Поэтому ранее и принято значение $1188 = 4 \cdot 36 \cdot \frac{33}{4}$.

4.9 Уравнение Пелля в системе mn параметров

Уравнение Пелля

В своей книге Г.Эдвардс пишет - В 1657г. П.Ферма предложил английским математикам задачу " Если дано произвольное число, которое не является квадратом, то найдется также бесконечное количество таких квадратов, что если этот квадрат умножить на данное число и к произведению прибавить единицу, то результатом будет квадрат ". [Г.Эдвардс. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ ЧИСЕЛ. Изд.МИР.М. 1980. Стр.42].

В современном изложении уравнение Пелля имеет вид $Ax^2 + 1 = y^2$, где A, x, y – целые числа. Решение этого уравнения не тривиально (см. стр.42÷47). Здесь не ставится задача ревизии известных методов решения уравнения Пелля.

Целью данной работы является рассмотрение метода решения диофантовых уравнений с помощью системы mn параметров. В качестве примера использования предлагаемого метода выбрано уравнение Пелля.

Метод решения уравнения Пелля в системе mn параметров

Пусть имеем в качестве исходного уравнения

$$Ax^2 + 1 = y^2 \quad (1)$$

Где A, x, y – целые числа. Необходимо предложить метод нахождения указанных троек целых чисел .

Решение Запишем уравнение (1) в виде $(X\sqrt{A})^2 + 1^2 = Y^2$. Это уравнение Пифагора и поэтому отражает собой прямоугольный треугольник, у которого Y – гипотенуза, $(X\sqrt{A}, 1)$ – катеты (Рис.1).

Формулы системы mn параметров

Метод 1

$$Y = n^2 + 2mn + 2m^2, \quad 1 = n^2 + 2mn, \quad X\sqrt{A} = 2m^2 + 2mn$$

$$\rightarrow n^2 + 2mn - 1 = 0 \rightarrow n_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\rightarrow X\sqrt{A} = 2m^2 + 2m \cdot (-m \pm \sqrt{m^2 + 1})$$

$$\rightarrow X\sqrt{A} = \pm 2m \cdot \sqrt{m^2 + 1} \quad (2)$$

Пример 1 Пусть

$$A = 2 \rightarrow m^2 + 1 = 2 \rightarrow m^2 = 1 \rightarrow X = 2m = 2 \rightarrow 2 \cdot 4 + 1 = 3^2$$

$$A = 3 \rightarrow m^2 + 1 = 3 \rightarrow m^2 = 2 \rightarrow X = 2m = 2 \cdot \sqrt{2} \rightarrow 3 \cdot 8 + 1 = 5^2$$

Здесь значение X не равно целому числу. Поэтому данное решение следует считать непригодным.

$$A = 5 \rightarrow m^2 + 1 = 5 \rightarrow m^2 = 4 \rightarrow X = 2m = 2 \cdot 2 \rightarrow 2 \cdot 16 + 1 = 9^2$$

$$A = 6 \rightarrow m^2 + 1 = 6 \rightarrow m^2 = 5 \rightarrow X = 2m = 2 \cdot \sqrt{5} \rightarrow 6 \cdot 20 + 1 = 11^2$$

и т.д.

Метод 2

Множество основных пифагоровых треугольников содержит ПТ, для которых, разность между гипотенузой и одним из катетов равна единице. Например ПТ(4,3,5), ПТ(12,5,13), ПТ(40,9,41). Для таких ПТ $\rightarrow X+Z = Y^2$. Так, например, $4+5=3^2$, $12+13=5^2$, $40+41=9^2$.

Пусть $Ax^2+1 = y^2 \rightarrow y^2 - 1 = Ax^2$.

Поэтому, элементы уравнения Пелля, можно записать в виде

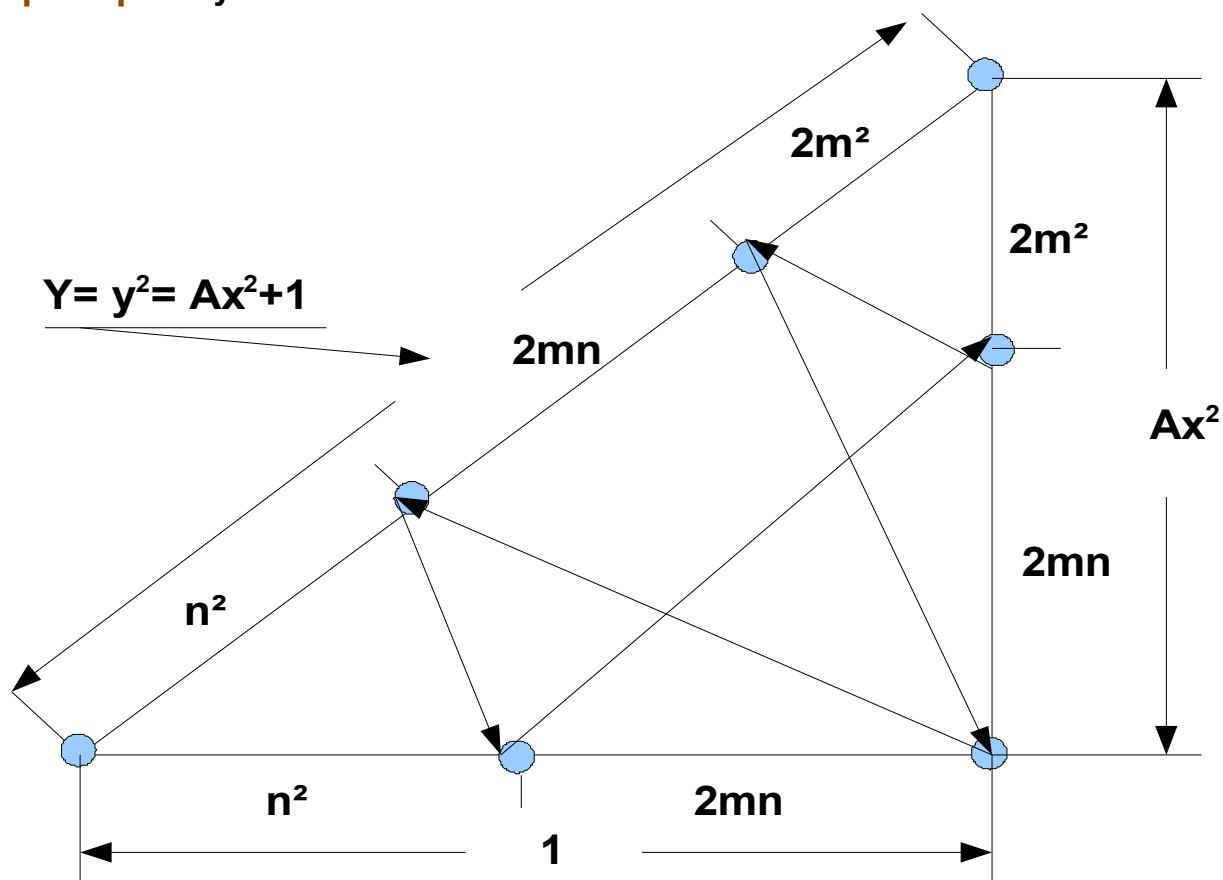
$$X = \frac{\sqrt{A \cdot x^2 + 1} - 1}{2}, Y = \sqrt{A \cdot x^2 + 1}, Z = \frac{\sqrt{A \cdot x^2 + 1} + 1}{2}$$

$$\rightarrow \text{ПТ} \left(\frac{\sqrt{A \cdot x^2 + 1} - 1}{2}, \sqrt{A \cdot x^2 + 1}, \frac{\sqrt{A \cdot x^2 + 1} + 1}{2} \right).$$

Где Ax^2, y^2 – элементы уравнения Пелля

X, Y, Z – элементы ПТ.

Пример 2 Пусть $A = 2 \rightarrow x = 2 \rightarrow 2 \cdot 2^2 + 1 = 9 \rightarrow$



Формулы системы mn параметров

$$Y = n^2 + 2mn + 2m^2, 1 = n^2 + 2mn, Ax^2 = 2m^2 + 2mn$$

$$\rightarrow n_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 + 1}, \rightarrow Ax^2 = 2m^2 + 2m \cdot (-m \pm \sqrt{m^2 + 1})$$

$$\rightarrow Ax^2 = \pm 2m (\sqrt{m^2 + 1})$$

Рис.1 Уравнение Пелля в системе mn параметров

4.10 Музыкальный ряд в системе m n параметров

На сайте Пифагоров строй (www.px-pict.com/7/3/2/1/8/1.html) в доступной форме показана методика образования современного музыкального ряда

Математическим строем называется совокупность частотных отношений между звуками в музыкальной системе.

Введение в музыкальную практику многоголосых инструментов с фиксированной частотой звуков (орган и др.) заставило композиторов и исполнителей заинтересоваться количественной стороной музыкальных систем.

К этому времени в науке был известен целый ряд звуковых строев, разработанных китайскими, персидскими, индийскими, арабскими и греческими учеными, в основе которых лежали самые разнообразные математические принципы отбора звуков и которые пытались объяснить соотношения между звуками в произведениях народного музыкального творчества.

Мы считаем излишним останавливаться на рассмотрении китайских, персидских, арабских и индийских звуковых строев, так как эти строи не оказали непосредственного влияния на европейскую музыку, а начнем с изучения строя, разработанного древнегреческими учеными и известного под именем "**строя Пифагора**".

Древнегреческим ученым было известно, что на **монохорде** (музыкальный инструмент, состоящий из струны, натянутой на резонансный ящик — прим. ред.) можно получить звуки не только путем возбуждения **целой** струны, но и ее **частей**: $1/2$, $2/3$ и $3/4$, и что звуки, полученные путем возбуждения указанных частей струны, образуют с ее основным тоном интервалы **октавы** — $1/2$ струны, **квинты** — $2/3$ струны и **кварты** — $3/4$ струны (по современной терминологии).

Эти интервалы, найденные опытным путем и получившие, по преданию, применение при настройке лиры Орфея, стали **основными** интервалами пифагорова строя.

Остальные интервалы этого строя были найдены последователями Пифагора посредством **вычислений**.

Трудно сказать, какие причины заставили указанных ученых отказаться от дальнейших делений струны на части в целях получения новых интервалов, известно лишь, что формирование пифагорова строя осуществлялось не опытным, а **математическим** путем.

Этот путь был основан на следующих соображениях: так как $2/3$ **целой** струны дают звук квинтой выше ее **основного** тона, а $3/4$ **целой** струны — звук квартой выше **того же тона**, то $2/3$ **любой части** струны должны дать звук квинтой выше **этой же части**, а $3/4$ **любой части** струны — звук квартой выше **этой части**.

Таким образом, если основной тон струны есть c и если взять $2/3$ от $2/3$ струны, т. е. $4/9$ струны, то звук, соответствующий этой части струны, будет d^1 .

Этот звук находится **за пределами** октавы c — c^1 . Взявши вместо него d , мы найдем, что последнему звуку соответствует $8/9$ струны (перенесение звука на октаву вниз соответствует увеличению длины струны вдвое — прим. ред.)

Если взять $2/3$ от $8/9$ струны, т. е. $16/27$ струны, то звук, соответствующий этой части струны, будет a .

Если взять $2/3$ от $16/27$ струны, т. е. $32/81$ струны, то звук, соответствующий этой части струны, будет e^1 . Этот звук находится за пределами октавы c — c^1 . Взявши вместо него e , мы найдем, что последнему звуку соответствует $64/81$ струны.

Если взять $2/3$ от $64/81$ струны, т. е. $128/243$ струны, то звук, соответствующий этой части струны, будет h .

Если расположить все найденные нами звуки в порядке их высоты и подписать под ними соответствующие части струны, то мы получим **диатоническую мажорную гамму пифагоровой настройки**, в которой частотные отношения между звуками выражены в долях струны:

до	ре	ми	фа	соль	ля	си	до ¹
c	d	e	f	g	a	h	c ¹
1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2
8/9		243/256		8/9		243/256	
8/9		8/9		8/9			

(зеленым цветом указаны величины интервалов между соответствующими звуками).

Если, исходя из основных интервалов пифагорова строя, двигаться от звука f по чистым квинтам вниз, производя при этом соответствующие вычисления, то мы получим **фригийскую гамму (по средневековой терминологии)**, в которой частотные отношения между звуками выражены в долях струны:

до	ре-бем.	ми-бем.	фа	соль	ля-бем.	си-бем.	до ¹
c	des	es	f	g	as	b	c ¹
1	243/256	27/32	3/4	2/3	81/128	9/16	1/2
243/256		8/9		243/256		8/9	
8/9		8/9		8/9			

Двигаясь по чистым квинтам вверх от звука h и по чистым квинтам вниз от звука des и производя соответствующие вычисления, мы придем в первом случае к звуку his , а во втором — к звуку $deses$.

Звук his на интервал $524288/531441$ (который приблизительно равен дроби $73/74$) выше звука c^1 , а звук $deses$ — на тот же интервал ниже звука c .

Интервал, на который his выше c^1 , а $deses$ ниже c получил название **"пифагоровой коммы"**, что составляет около $1/9$ тона (коммой называется интервал, меньший $1/8$ целого тона). Таким образом, строй Пифагора — **незамкнутый**.

Так как каждый интервал пифагорова строя получается посредством того или иного количества квинтовых ходов (вверх или вниз от исходного звука c последующими октавными перенесениями), то каждый интервал этого строя имеет **только одно количественное выражение**, так:

(1) б. секунда, получаемая посредством **двух** квинтовых ходов, выражается отношением 8/9;

(2) б. секста, получаемая посредством **трех** квинтовых ходов, выражается отношением 16/27;

(3) б. терция, получаемая посредством **четырех** квинтовых ходов, выражается отношением 64/81;

(4) диатонический полутон, получаемая посредством **пяти** квинтовых ходов, выражается отношением 243/256;

(5) хроматический полутон, получаемая посредством **семи** квинтовых ходов, выражается отношением 2048/2187.

Так как 2048/2187 меньше 243/256 струны, то хроматический полутон пифагорова строя больше диатонического на пифагорову комму.

Так как все интервалы пифагорова строя (за исключением октавы) являются производными от чистой квинты, то пифагоров строй есть строй **однофакторный**.

На Рис.1 представлена схема реализации октавы, квинты и кварты.

Алгоритм организации последовательности звуков

Основной ряд	$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$	1 звук	до
Квинта от квинты	$\rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$		
Переход на удвоенный звук	$\rightarrow \frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9}$	звук	ре
$\frac{2}{3}$ от $\frac{8}{9}$	$\rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{27}$	звук	ля
$\frac{2}{3}$ от $\frac{16}{27}$	$\rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{27} = \frac{32}{81}$		
Переход на удвоенный звук	$\rightarrow \frac{32}{81} \cdot 2 = \frac{64}{81}$	звук	ми
$\frac{2}{3}$ от $\frac{64}{81}$	$\rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{64}{81} = \frac{128}{243}$	звук	си
	$\frac{3}{4}$	звук	фа
	$\frac{4}{3}$	звук	соль

Представляет интерес использовать систему mn параметров для построения музыкального ряда по методике указанного сайта, Может возникнуть вопрос “**Зачем это надо?**“. Прежде, чем ответить на этот вопрос, произведем краткий анализ частот современного музыкального ряда. Основой этого ряда является простой подход к частотным градациям монохорды. Однако математическая объективность такого подхода является недоказуемой. Именно поэтому в науке был известен целый ряд звуковых строев, разработанных китайскими, персидскими, индийскими, арабскими и греческими учеными, в основе которых лежали самые разнообразные математические принципы отбора звуков.

В системе mn параметров базовой основой музыкального ряда является объективное свойство цикличности сторон прямоугольного треугольника. На первом уровне дерева ПТ имеем триаду ПТ₀(4, 3, 5), ПТ₁₁(21, 20, 29), ПТ₁₂(15, 8, 17), ПТ₁₃(12, 5, 13). Фрагмент дерева ПТ представлен на Рис.2.

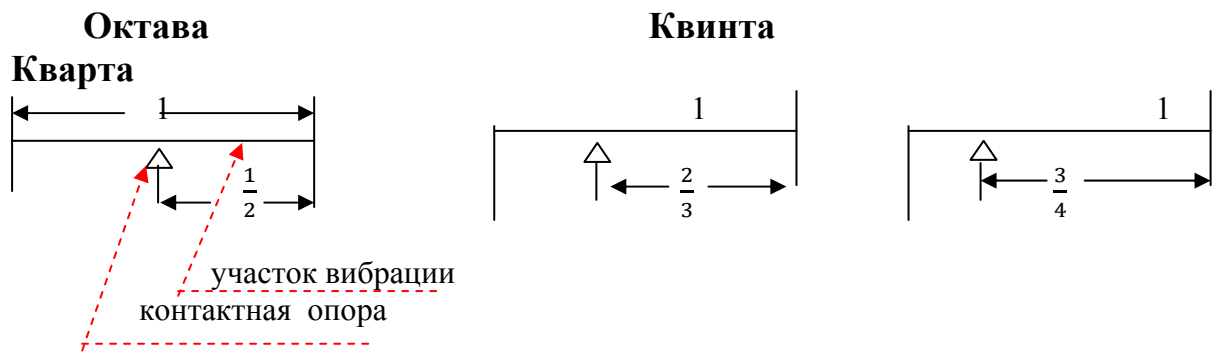


Рис.1 Схема участков монохорды

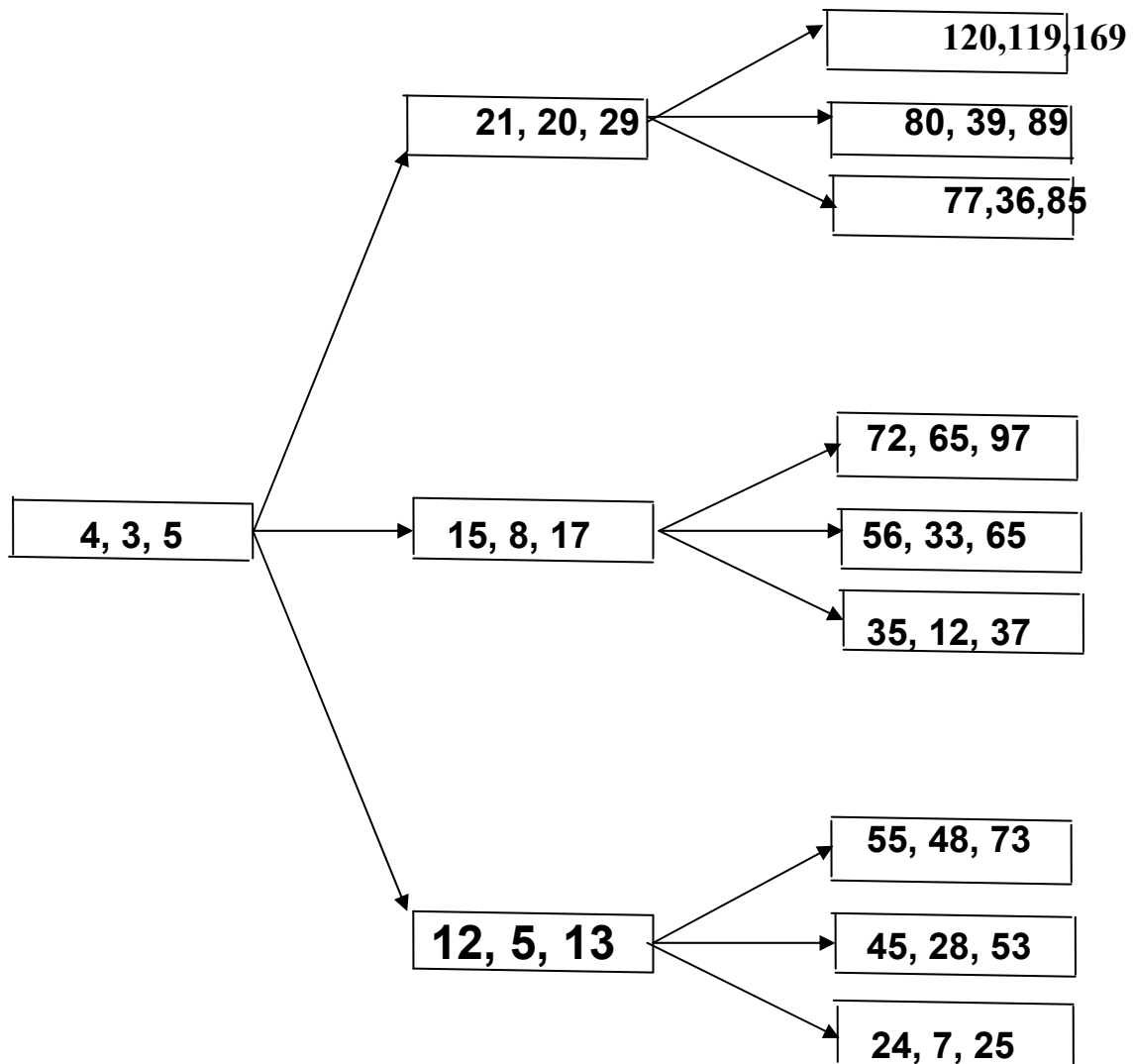


Рис.2 Фрагмент дерева ПТ

Теперь, имея строгие численные значения элементов ПТ, можно перейти к значениям $\sin(\alpha) = \frac{y}{z}$, $\cos(\alpha) = \frac{x}{z}$, $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{y}{x}$. Тогда, на основании фрагмента ПТ (Рис.2), получим Рис.3, Рис.4, Рис.5.

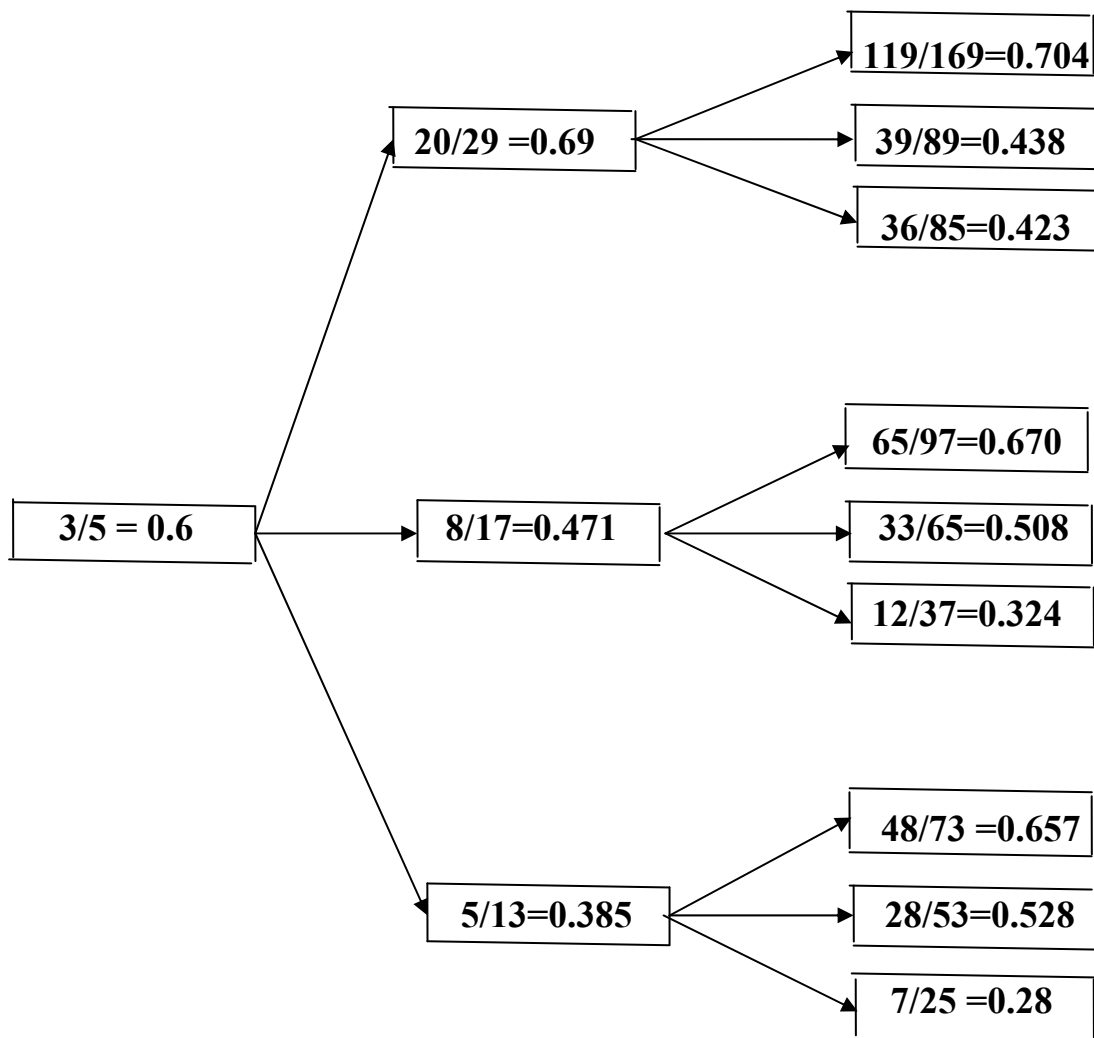


Рис.3 Музыкальный ряд на основе синуса дерева ПТ

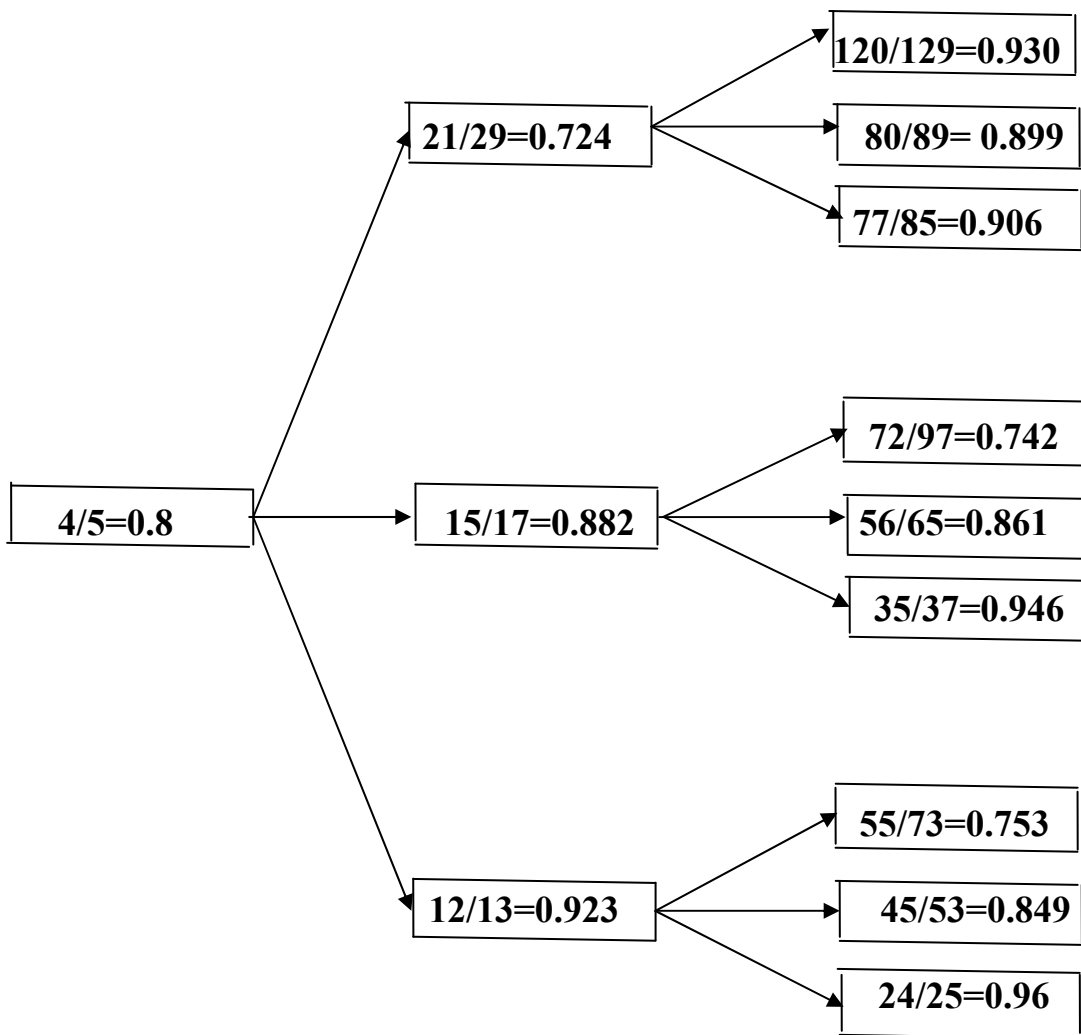


Рис.4 Музыкальный ряд на основе косинуса дерева ПТ

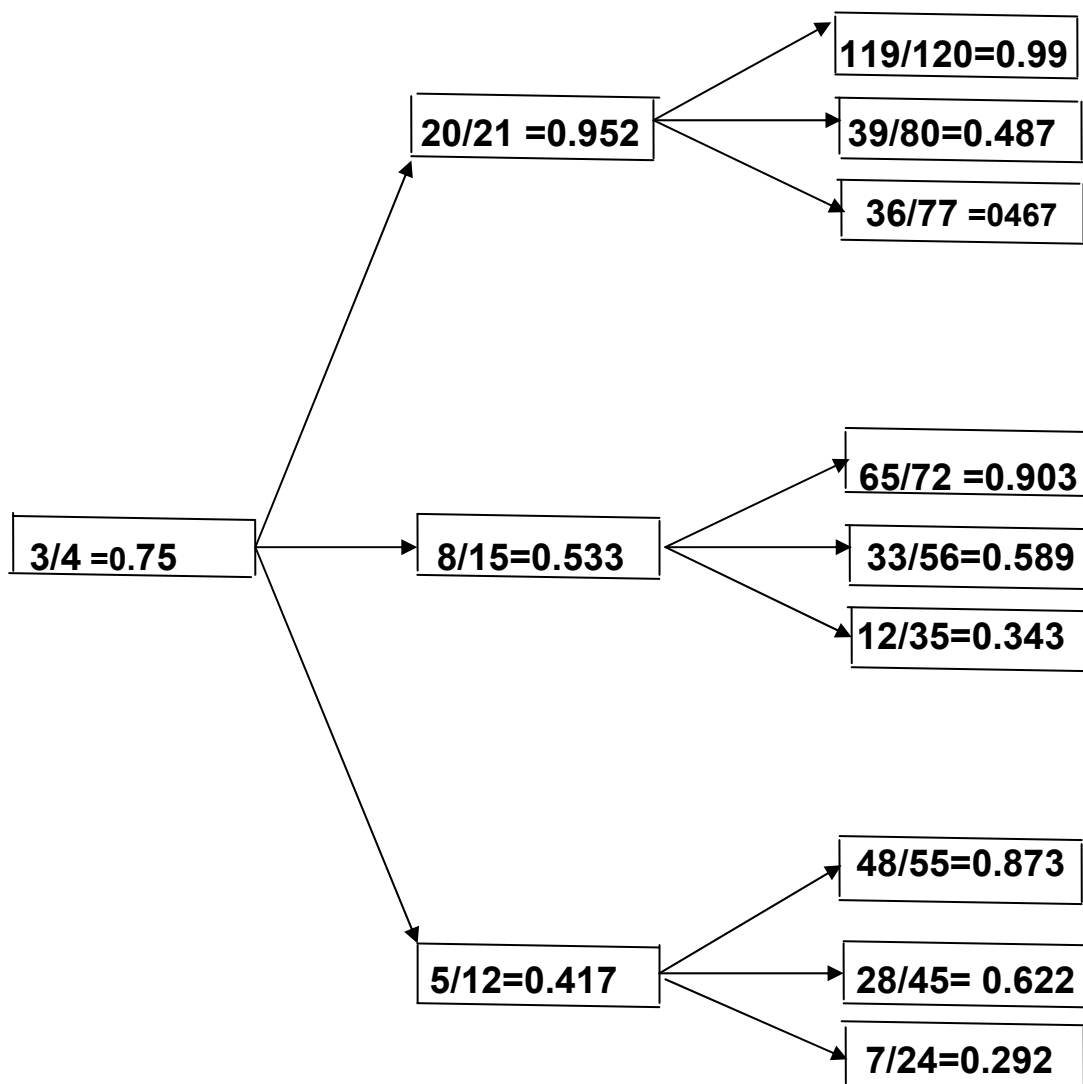


Рис.5 Музыкальный ряд на основе тангенса дерева ПТ

На рисунках 3, 4, 5 представлены дробные числа. Если эти числа считать долями **монохорды**, то получим **музыкальный ряд** .

В таблице 1 представлены результаты частей монохорды современного музыкального ряда и полных музыкальных рядов составленных на основе дерева ПТ. В настоящее время нашло применение семизначное ограничение музыкального ряда, от звука **“до”** до звука **“си”**. Поэтому, для построения семизначного музыкального ряда, можно ограничиться только одной из последних триад дерева ПТ (Рис.3. см. область ограниченную пунктирной линией). Из Рис.3 видно, что можно создать 9 таких семизначных рядов(см. Таблица 2).

Таблица 1

Тип ряда	до	ре	ми	фа	соль	ля	си	---	---	---	---	---	---
Современ	1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	---	---	---	---	---	---
Sin α ПТ	119/169	20/29	65/97	48/73	3/5	28/53	33/65	36/85	8/17	39/89	5/13	12/37	7/24
Cos α ПТ	24/25	35/37	120/129	12/13	77/85	80/89	15/17	56/65	45/53	4/5	55/73	72/97	21/29
tg α ПТ	119/120	20/21	65/72	48/55	3/4	28/45	33/56	8/15	39/80	36/77	5/12	12/35	7/24

Таблица 2

№ n/n	тип ряда	до	ре	ми	фа	соль	ля	си
	Современ	1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243
1	Sin α ПТ верхняя	119/169	20/29	3/5	8/17	39/89	36/85	5/13
2	Sin α ПТ средняя	20/29	65/97	3/5	33/65	8/17	5/13	12/37
3	Sin α ПТ нижняя	20/29	48/73	3/5	28/53	8/17	5/13	7/25
4	Cos α ПТ верхняя	120/129	12/13	77/85	80/89	15/17	4/5	21/29
5	Cos α ПТ средняя	33/37	12/13	15/17	56/65	4/5	72/97	21/29
6	Cos α ПТ нижняя	24/25	12/13	15/17	45/53	4/5	55/73	21/29
7	tg α ПТ верхняя	119/120	20/21	3/4	8/15	39/80	36/77	5/12
8	tg α ПТ средняя	20/21	65/72	3/4	33/56	8/15	5/12	12/35
9	tg α ПТ нижняя	20/21	48/55	3/4	28/45	8/15	5/12	7/24

Выводы

1. Использование системы mn параметров для формирования звуковых рядов реализует объективное свойство дерева ПТ в акустической форме
2. Эти звуковые ряды дают возможность более гармоничного звучания и восприятия мелодий в связи с линейностью и объективностью (включая "золотое сечение") итерационных формул дерева ПТ
3. Использование системы mn параметров для формирования звуковых рядов реализует возможность создания 12 звуковых рядов.
4. Использование системы mn параметров для формирования звуковых рядов реализует возможность комфортного восприятия мелодий.

Автор с благодарностью примет конкретные предложения, замечания и оценки.

Далее см. (часть 3)

1. Таблица основных ПТ до 9 уровня дерева
 2. Пакет программ в редакторе Mathcad
- Ответы на вопросы fgg-fil1@narod.ru