Автор: Э.Г.Фильчев

Адрес:Россия.188760.Ленинградская область

г.Приозерск .ул.Привокзальная 5. кв.60.

Уравнение Пелля в системе mn параметров

Уравнение Пелля

В своей книге Г.Эдвардс пишет - В 1657г. П.Ферма предложил английским математикам задачу " Если дано произвольное число, которое не является квадратом, то найдется также бесконечное количество таких квадратов, что если этот квадрат умножить на данное число и к произведению прибавить единицу, то результатом будет квадратом ". [Г.Эдвардс. Последняя теорема Ферма.Генетическое введение в АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ ЧИСЕЛ. Изд.МИР.М. 1980. Стр.42].

В современном изложении уравнение Пелля имеет вид $Ax^2 + 1 = y^2$, где A, x, y – целые числа. Решение этого уравнения не тривиально (см. стр.42÷47). Здесь не ставится задача ревизии известных методов решения уравнения Пелля.

Целью данной работы является рассмотрение метода решения диофантовых уравнений с помощью системы mn параметров. В качестве примера использования предлагаемого метода выбрано уравнение Пелля.

Метод решения уравнения Пелля в системе mn параметров

Пусть имеем в качестве исходного уравнения

$$Ax^2 + 1 = y^2 \qquad (1)$$

Где A, x, y – целые числа. Необходимо предложить метод нахождения указанных троек целых чисел .

Решение Запишем уравнение (1) в виде $\left(X\sqrt{A}\right)^2 + 1^2 = Y^2$. Это уравнение Пифагора и поэтому отражает собой прямоугольный треугольник, у которого Y – гипотенуза, ($X\sqrt{A}$, 1) – катеты (Рис.1).

Формулы системы mn параметров

Метод 1

$$\mathbf{Y = n^2 + 2mn + 2m^2,\ \ 1 = n^2 + 2mn,\ X\sqrt{A} = 2m^2 + 2mn}$$

$$\rightarrow\ \mathbf{n^2 + 2mn - 1 = 0 \rightarrow n_{1,2} = - m \pm \sqrt{m^2 + 1}}$$

$$\rightarrow \mathbf{X\sqrt{A} = 2m^2 + 2m \cdot (- m \pm \sqrt{m^2 + 1})}$$

$$\rightarrow X\sqrt{A} = \pm\, 2m \cdot \sqrt{m^2+1} \qquad (2)$$

Пример 1 Пусть

A = 2 → $m^2+1 = 2$ → $m^2 = 1$ → X = 2m = 2 → 2·4 + 1 = 3^2

A = 3 → $m^2+1 = 3$ → $m^2 = 2$ → X = 2m = $2\cdot\sqrt{2}$ → 3·8 + 1 = 5^2

Здесь значение X не равно целому числу. Поэтому данное решение следует считать непригодным.

A = 5 → $m^2+1 = 5$ → $m^2 = 4$ → X = 2m = 2·2 → 2·16 + 1 = 9^2

A = 6 → $m^2+1 = 6$ → $m^2 = 5$ → X = 2m = $2\cdot\sqrt{5}$ → 6·20 + 1 = 11^2

и т.д.

Метод 2

Множество основных пифагоровых треугольников содержит ПТ, для которых , разность между гипотенузой и одним из катетов равна единице. Например ПТ(4,3,5),ПТ(12,5,13) , ПТ(40,9,41) . Для таких ПТ

→ X+Z = Y^2. Так , например, 4+5=$3^2, 12+13=5^2, 40+41=9^2$.

Пусть $Ax^2+1 = y^2$. → $y^2 - 1 = Ax^2$.

Поэтому , элементы уравнения Пелля, можно записать в виде

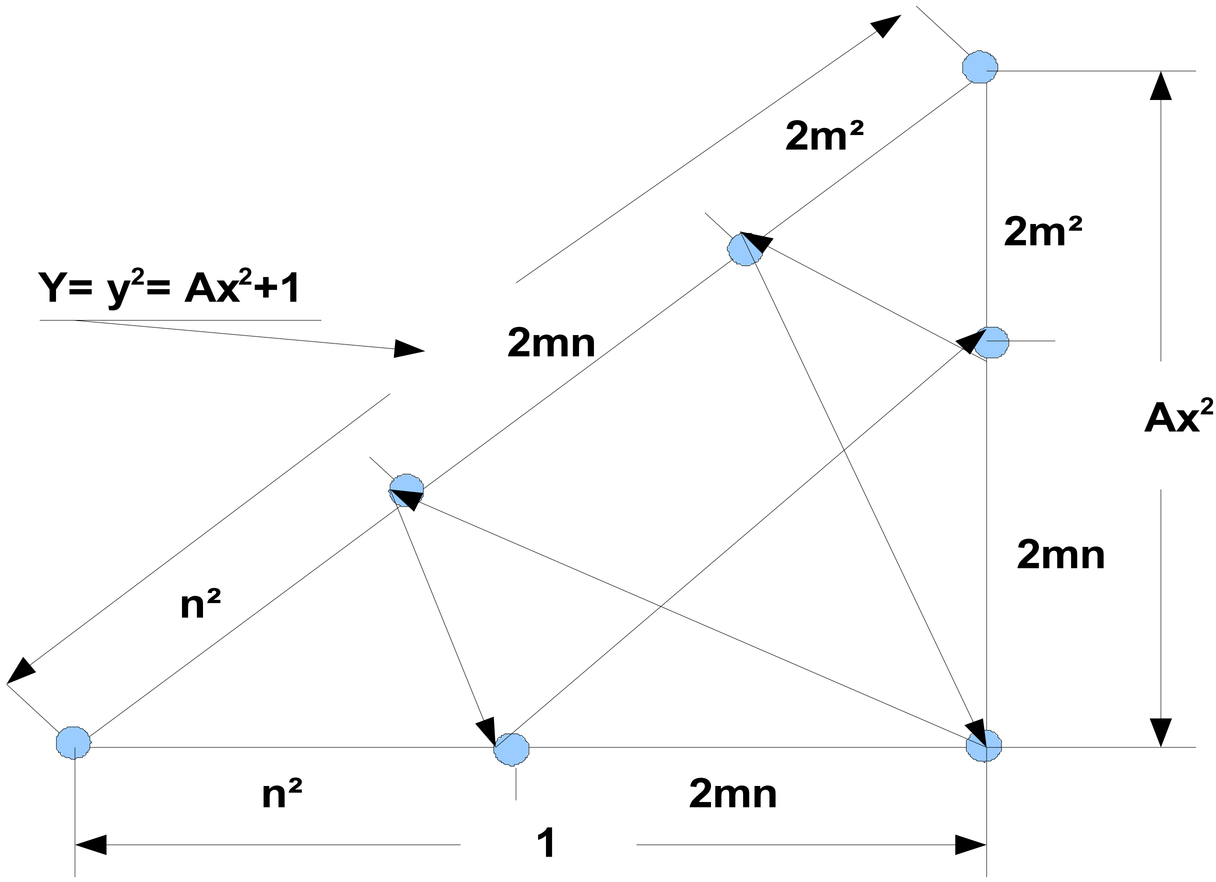
$$X= \frac{\sqrt{A\cdot x^2+1}-1}{2},\ Y = \sqrt{A\cdot x^2+1}\ ,\ Z=\frac{\sqrt{A\cdot x^2+1}}{2}$$

$$\rightarrow \qquad ПТ\left(\frac{\sqrt{A\cdot x^2+1}-1}{2}, \sqrt{A\cdot x^2+1}\ , \frac{\sqrt{A\cdot x^2+1}}{2}\right).$$

Где Ax^2, y^2 – элементы уравнения Пелля

X, Y, Z – элементы ПТ.

Пример 2 Пусть A = 2 → x = 2 → $2 \cdot 2^2 + 1 = 9$ →



Формулы системы mn параметров

$$Y = n^2 + 2mn + 2m^2,\quad 1 = n^2 + 2mn,\quad Ax^2 = 2m^2+2mn$$

$$\rightarrow n_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2+1},\quad \rightarrow Ax^2 = 2m^2+2m\cdot(-m \pm \sqrt{m^2+1})$$

$$\rightarrow \quad Ax^2 = \pm 2m\left(\sqrt{m^2+1}\right)$$

Рис.1 Уравнение Пелля в системе mn параметров