Автор: Э.Г.Фильчев

Адрес:Россия.188760.Ленинградская область

г.Приозерск .ул.Привокзальная 5. кв.60.

Магистральные направления возможных приращений значений координат точки

1.Предел приращений элементов координатного треугольника.

ВНИМАНИЕ !

Здесь не ставится задача ревизии и отмены современного понятия производной функции , а предлагается методика рассмотрения координат точки как взаимосвязанную систему двух уравнений от двух переменных.

В системе mn параметров элементы координатного треугольника могут быть представлены в виде аналитических выражений любого из восьми вариантов(см.Табл.1). Каждый из этих вариантов определяет взаимосвязанную систему уравнений. Задание координатной системы, т.е. фиксирование начала координат, осей, градации этих осей, задают для каждой точки координат, систему уравнений вида

$$x=\varphi_1(m, n)\ ;\ y=\varphi_2(m, n) \qquad (1)$$

Если задана точка $M_o(x_o,y_o)$, то следовательно заданы и элементы координатного треугольника , т.е.

$$x_o, y_o, \quad z_o=\sqrt{x_o^2+y_o^2}$$

Выбрав вариант аналитических выражений для x_o, y_o, получим систему двух уравнений вида (1). Решив эту систему получим значения m n.

Обратим внимание на то, что система уравнений вида (1) при заданных x_o,y_o однозначно определяет местоположение точки M_o и эта система уравнений НЕ ЗАВИСИТ от вида функции y=f(x), проходящей через точку $M_o(x_o,y_o)$.

Такой подход дает возможность, не изменяя понятия о производной функции, рассматривать любую точку координатной системы $M_i(x_i,y_i)$ как пункт (развилку) возможных приращений значений координат точки M_i. При этом **число дальнейших возможных приращений элементов Δx, Δy, Δz будет КОНЕЧНЫМ , а не БЕСКОНЕЧНЫМ и число касательных к точке M_i также будет конечным.**

Это утверждение может вызвать несогласие с постулатами непрерывных функций, однако ввод параметров mn фактически реализует переход к дискретности системы координат.

Перейдем к рассмотрению возможных предельно малых приращений Δx_o, Δy_o, Δz_o . Рассмотрим случаи

1. n=Var, m=Const
2. n=Const, m=Var
3. n=Var, m=Var

Таблица1

№	0	1	2	3	4	5	6	7
$2m^2$	z_o+x_o	z_o+x_o	z_o-x_o	z_o-x_o	z_o+y_o	z_o+y_o	z_o-y_o	z_o-y_o
n^2	z_o+y_o	z_o-y_o	z_o-y_o	z_o+y_o	z_o+x_o	z_o-x_o	z_o-x_o	z_o+x_o
x_o	$2mn-n^2$	$2mn-n^2$	$2mn+n^2$	$(2mn+2m^2)$	$2mn-2m^2$	$2m^2-2mn$	$2mn+2m^2$	$-(2mn+2m^2)$
y_o	$2mn-2m^2$	$2m^2-2mn$	$2mn+2m^2$	$-(2mn+2m^2)$	$2mn-n^2$	$2mn-n^2$	$2mn+n^2$	$2mn+n^2$
z_o	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$

Здесь не ставится задача ревизии понятия производной.
Как известно, производной функции одной переменной называют предел отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю

$$y'_x = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2)$$

Если $y=f(x)$ изображена своим графиком – кривой, в декартовых координатах (Рис.1), то $y'=\mathrm{tg}\varphi$, где φ -угол между осью $0x$ и касательной к кривой в данный ее точке, отсчитываемой от положительного направления оси $0x$ против часовой стрелки. На Рис.1 показано графическое представление производной, при этом приращения Δx и Δy, для наглядности, даны в увеличенном виде.
Из Рис.1 видно, что чем меньше значение Δx_o, тем ближе точка M_i к точке M_o.
Перейдем к системе mn параметров. Для проведения типового расчета приращений функции и аргумента используем второй вариант из таблицы 1.

Типовой расчет приращений.

Пусть $n=Var$, $m=Const$

1.
$$\Delta x_o = n_\Delta^2 + 2m_\Delta n_\Delta$$
$$\Delta y_o = 2m_\Delta^2 + 2m_\Delta n_\Delta \qquad (3)$$
$$\Delta z_o = n_\Delta^2 + 2m_\Delta n_\Delta + 2m_\Delta^2$$

2. Поместим точку M_o (см. Рис.1) в начало НОВОЙ системы координат (Рис.2)
3. Введем обозначение

$$L = \lim_{n_\Delta \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{n_\Delta \to 0} \frac{2m_\Delta^2 + 2m_\Delta n_\Delta}{n_\Delta^2 + 2m_\Delta n_\Delta}$$

Здесь n_Δ^2 – величина бесконечно малая второго порядка и поэтому ею можно пренебречь и тогда

$$L = \frac{m_\Delta}{n_\Delta} + 1 \quad \rightarrow \quad m_\Delta = n_\Delta(L-1) \qquad (4)$$

4. Подставив данное значение m_Δ в формулы (3)

$$\rightarrow \Delta x_o = n_\Delta^2 + 2n_\Delta^2(L-1) = n_\Delta^2(2L-1)$$
$$\Delta y_o = 2n_\Delta^2(L-1)^2 + 2n_\Delta^2(L-1) = 2n_\Delta^2 L(L-1) \qquad (5)$$
$$\Delta z_o = n_\Delta^2[2L(L-1)+1]$$

5.Обратим внимание на то, что в этих значениях элементов имеет место общий множитель n_Δ^2. В п.3 было принято условие, что n_Δ^2 –величина бесконечно малая второго порядка и поэтому элементы Δx_o, Δy_o, Δz_o - также бесконечно малые величины.

Однако n_{Δ}^{2} являясь малой величиной **не равна** нулю и поэтому ее можно сократить как обычный множитель.

Сократив формулы (5) на n_{Δ}^{2} получим новые значения элементов

$$\begin{aligned} X&=2L-1 \\ Y&=2L(L-1) \\ Z&=2L(L-1)+1 \end{aligned} \qquad (6)$$

Это элементы основного пифагорова треугольника.

$$ПТ[2L-1,2L(L-1),2L(L-1)+1] \qquad (7)$$

6.Луч этого ПТ дает направление приращения Δz_o (Рис.2). ПТ(6) обладает тем свойством, что Y меньше Z точно на единицу.

$$n=\pm\sqrt{Z-Y}=\pm 1 \;\rightarrow\; Z-X=2m^2=2L^2-2L+1-2L+1=2(L-1)^2$$

$$\rightarrow m=\pm(L-1)$$

$$\rightarrow L_1=m+1$$

$$\rightarrow L_2=1-m$$

7.Для L_1 из (6)

$$\begin{aligned} X_1&=2m+1 \\ Y_1&=2(m+1)m \\ Z_1&=2m(m+1)+1 \end{aligned} \qquad (8)$$

Для L_2 из (6)

$$\begin{aligned} X_2&=-(2m-1) \\ Y_2&=2m(m-1) \\ Z_2&=2m(m-1)+1 \end{aligned} \qquad (9)$$

На этом типовой расчет закончен. Подобные расчеты для первых четырех вариантов формул таблицы дают результаты mn параметров представленные в таблице 2.

Таблица 2

№	1	2	3	4
X	2m+1	2m-1	2m+3	2m-3
Y	2m(m+1)	2m(m-1)	2(m+1)(m+2)	2(m-1)(m-2)
Z	2m(m+1)+1	2m(m-1)+1	2(m+1)(m+2)+1	2(m-1)(m-2)+1

В таблице 2 даны значения элементов основных пифагоровых треугольников в координатной системе Δx, Δy (рис. 3). На этом рисунке точка N-вершина ПТ (x,y,z), ее координаты в системе осей x,y

$$x_N=x_o+X$$
$$y_N=y_o+Y$$

Уравнение прямой проходящей через точки *Mo* и *N* имеет вид:

$$\frac{y-y_0}{y_N-y_0}=\frac{x-x_0}{x_N-x_0} \;\rightarrow\; \frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{Y}{X} \qquad (10)$$

Это уравнение луча ПТ(X,Y,Z), где

x,y –переменные

y_o, x_o,Y,X – постоянные

X,Y -элементы пифагорова треугольника (см.табл.2)

Для определения значений X,Y необходимо иметь значение параметра m. Этот параметр можно определить из значений координат точки $M_o(x_o,y_o)$

$$\rightarrow z_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2} \rightarrow \mathrm{m}_1 = \sqrt{\frac{z_o + x_o}{2}}, \rightarrow \mathrm{m}_2 = \sqrt{\frac{z_o - x_o}{2}} \qquad (11)$$

$$m_3 = \sqrt{\frac{z_0 + y_0}{2}} \qquad \mathrm{m}_4 = \sqrt{\frac{z_0 - y_0}{2}}$$

На основании проведенного расчета можно сделать следующее утверждение

<u>Утверждение 1</u> "Из любой точки $M_o(x_o,y_o)$ координатной системы (хоу) дальнейшие перемещения (бесконечно малые приращения) аргумента и функции y=f(x), проходящей через точку M_o, возможно только по конечному числу строго определенных направлений в соответствии с уравнением прямой

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{Y}{X}$$

где x,y - текущие значения переменных

x_o,y_o - координаты точки M_o

X,Y - элементы пифагорова треугольника в соответствии с табл.2.

m - параметр элементов X,Y имеющий четыре возможных значения

$$\mathrm{m}_1 = \sqrt{\frac{z_o + x_o}{2}}, \quad \mathrm{m}_2 = \sqrt{\frac{z_o - x_o}{2}}, \mathrm{m}_3 = \sqrt{\frac{z_o + y_o}{2}}, \quad \mathrm{m}_4 = \sqrt{\frac{z_o - y_o}{2}}$$

$$z_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$$

".

<u>Или иначе :</u>

"Через заданную точку $M_o(x_o,y_o)$ координатной системы (хоу) можно провести конечное число касательных по строго определенным направлениям по которым возможны дальнейшие перемещения (бесконечно малые приращения) аргумента и функции y=f(x), проходящей через точкуM_o".

<u>Пример 1</u>. В прямоугольной системе координат XOY задана точка M_o с координатами $x_o=7$, $y_o=24$. Определить направления бесконечно малых возможных приращений Δx_o, Δy_o,Δz_o для m_1и m_2 .

<u>Решение.</u>

1. $z_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$

2.Определим значения m для точки M_o

$$z_o+x_o=25+7=32 \rightarrow 2m_1^2=32 \rightarrow m_1=4$$

$z_o - x_o = 25 - 7 = 18 \ \rightarrow \ 2m_2^2 = 18 \ \rightarrow \ m_2 = 3$

3.Пусть $m_1=4$. На основании формул таблицы 2

$X_1=9, \quad Y_1=2 \cdot 4 \cdot 5=40, Z_1=41$

$X_2=7, \quad Y_2=2 \cdot 4 \cdot 3=24, Z_2=25$

$X_3=11, Y_3=2 \cdot 5 \cdot 6=60, Z_3=61$

$X_4=5, \quad Y_4=2 \cdot 3 \cdot 2=12, Z_4=13$

4.Пусть $m_2=3$. Тогда получим дополнительный ПТ

$X_5=3, \quad Y_5=2 \cdot 2 \cdot 1=4, Z_5=5$

5.Определим по формуле (4.3) уравнения прямых, проходящих через вершины полученных ПТ и точку M_o.

5.1. $X_1=9, Y_1=40$

$$\rightarrow \frac{y-y_o}{x-x_o} = \frac{Y_1}{X_1} \rightarrow \mathrm{y} = \frac{\mathrm{Y}_1}{\mathrm{X}_1}x - \frac{Y_1}{X_1}x_o + y_o \rightarrow \mathrm{y} = \frac{40}{9}x - \frac{40}{9}7 + 24$$

$$\rightarrow y = \frac{40}{9}x - \frac{64}{9} \qquad (12)$$

5.2 $X_2=7, Y_2=24$

$$\rightarrow y = \frac{24}{7}x - \frac{24}{7}7 + 24 \rightarrow \mathrm{y} = \tfrac{24}{7}x \qquad (13)$$

5.3 $X_3=11, Y_3=60$

$$\rightarrow y = \frac{60}{11}x - \frac{60}{11}7 + 24 \rightarrow \mathrm{y} = \frac{60}{11}x - \frac{156}{11} \qquad (14)$$

5.4. $X_4=5, Y_4=12$

$$\rightarrow y = \frac{12}{5}x - \frac{12}{5}7 + 24 \rightarrow \mathrm{y} = \frac{12}{5}x - \frac{36}{5} \qquad (15)$$

5.5. $X_5=3, Y_5=4$

$$\rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{5}7 + 24 \rightarrow \mathrm{y} = \frac{4}{3}x + \frac{92}{5} \qquad (16)$$

Расчет закончен.

Уравнения (12-16) задают направление возможных приращений Δx_o, Δy_o, Δz_o

Расчет при n=Const, m=Var дает результаты представленные в таблице 2.

2. Полная производная элементов координатного треугольника

В предыдущем разделе был рассмотрен экстремальный случай приращений элементов координатного треугольника, а именно если

1. n_Δ =Var, то m_Δ =Const,
2. n_Δ =Const то m_Δ =Var

В общем случае оба параметра – переменные. В соответствии с правилом дифференцирования функции двух переменных имеем

$$L=\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial n}\cdot\frac{\partial n}{\partial x} \qquad (17)$$

где L –полная производная функции.

Для проведения типового расчета используем формулы третьего варианта таблицы 1.

Типовой расчет.

1.(Рис.2, Рис.3)

$$\begin{aligned}\Delta x_o&=n_\Delta^2+2m_\Delta n_\Delta\\ \Delta y_o&=m_\Delta^2+2m_\Delta n_\Delta\\ \Delta z_o&=n_\Delta^2+2m_\Delta n_\Delta+2m_\Delta^2\end{aligned} \qquad (18)$$

$$\mathrm{L}=\frac{\partial\Delta y_o}{\partial\Delta x_o}=\frac{\partial\Delta y_o}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial\Delta x_o}+\frac{\partial\Delta y_o}{\partial n}\cdot\frac{\partial n}{\partial\Delta x_o}$$

$$\rightarrow\ \mathrm{L}=\frac{(2\mathrm{m}_\Delta^2+2m_\Delta n_\Delta)'_m}{(n_\Delta^2+2m_\Delta n_\Delta)'_m}+\frac{(2m_\Delta^2+2m_\Delta n_\Delta)'_n}{(n_\Delta^2+2m_\Delta n_\Delta)'_n}$$

$$\rightarrow\ \mathrm{L}=\frac{(n_\Delta^2+2m_\Delta n_\Delta)+(2m_\Delta^2+2m_\Delta n_\Delta)}{n_\Delta^2+n_\Delta m_\Delta} \qquad (19)$$

2.

$$\rightarrow\ \mathrm{L}=\frac{\Delta\mathrm{x}_\mathrm{o}+\Delta y_o}{\Delta z_o-\Delta y_o+\dfrac{(\Delta x_o+\Delta y_o)-\Delta z_o}{2}}$$

$$\rightarrow\ \mathrm{L}=\frac{2(\Delta\mathrm{x}_\mathrm{o}+\Delta y_o)}{\Delta\mathrm{z}_\mathrm{o}+\Delta x_o-\Delta y_o} \qquad (20)$$

3.Запишем уравнение (13) относительно m_Δ.

$$m_\Delta^2-\frac{1}{2}(L-4)n_\Delta m_\Delta-\frac{1}{2}(L-1)n_\Delta^2=0$$

$$\rightarrow m_{\Delta 1,2}=\frac{n_o}{4}\left[(L-4)\pm\sqrt{L^2+8}\right] \qquad (21)$$

4. .Подставим данное значение $m_{\Delta 1}$ в формулы (12).

4.1.

$$\rightarrow\Delta x_{0_{1,2}}=n_\Delta^2+2n_\Delta\frac{n_\Delta}{4}\left[(L-4)\pm\sqrt{L^2+8}\right]$$

$$\rightarrow\Delta x_{o_{1,2}}=\frac{n_\Delta^2}{2}\left[(L-2)\pm\sqrt{L^2+8}\right]$$

4.2.

$$\Delta y_{o_{1,2}}=2m_\Delta^2+2n_\Delta m_\Delta=\frac{n_\Delta^2}{8}\left[(L-4)\pm\sqrt{L^2+8}\right]^2+\frac{n_\Delta^2}{2}\left[(L-4)\pm\sqrt{L^2+8}\right]$$

$$\rightarrow\Delta y_{o_{1,2}}=\frac{n_\Delta^2}{8}\left\{\left[(L-4)\pm\sqrt{L^2+8}\right]^2+4\left[(L-4)\pm\sqrt{L^2+8}\right]\right\}$$

4.3.

$$\Delta z_{0_{1,2}} = \Delta y_{o_{1,2}} + n_{\Delta}^2$$

$$\to \Delta z_{0_{1,2}} = \frac{n_{\Delta}^2}{8}\left\{\left[(L-4)\pm\sqrt{L^2+8}\right]^2 + 4\left[(L-4)\pm\sqrt{L^2+8}\right] + 8\right\}$$

5.Обратим внимание на то, что для $\Delta x_{0_{1,2}}$, $\Delta y_{0_{1,2}}$, $\Delta z_{0_{1,2}}$ имеет место общий множитель $n_{\Delta}^2/8$.

Сократив этот множитель и произведя ряд преобразований получим новые значения элементов

$$X_{1,2} = 4\left[(L-2)\pm\sqrt{L^2+8}\right]$$
$$Y_{1,2} = \left[(L-4)\pm\sqrt{L^2+8}\right]^2 + 4\left[(L-4)\pm\sqrt{L^2+8}\right] \qquad (22)$$
$$Z_{1,2} = \left[(L-4)\pm\sqrt{L^2+8}\right]^2 + 4\left[(L-4)\pm\sqrt{L^2+8}\right] + 8$$

Здесь элементы с одним индексом имеют один знак при радикалах. Это элементы двух основных пифагоровых треугольников $ПТ_1(x_1,y_1,z_1)$, $ПТ_2(x_2,y_2,z_2)$. Лучи этих ПТ задают направления возможных приращений Δx_0, Δy_0, Δz_0 от точки $M_o(x_0, y_0)$, (см. Рис 2).

На этом типовой расчет закончен. Результаты подобных расчетов для первых четырех вариантов значений Δx_0, Δy_0, Δz_0 таблицы 1 представлены в таблице 2. В таблице 2 указаны восемь пифагоровых треугольников лучи которых и определяют направления возможных приращений Δx_0, Δy_0, Δz_0 в секторе $0^o<\alpha<45^o$. В секторе $45^o<\alpha<90^o$ также будем иметь восемь пифагоровых треугольников. Для определения элементов этих ПТ необходимо в таблице 2 изменить строки X на Y.

Таблица 3.

	1	2
	$\Delta z+\Delta x=2m^2$ $\Delta z+\Delta y=n^2$	$\Delta z-\Delta x=2m^2$ $\Delta z-\Delta y=n^2$
Δx_o	$2mn-n^2$	n^2+2mn
Δy_o	$2mn-2m^2$	$2m^2+2mn$
Δz_o	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2+2mn+2m^2$
L	$-\dfrac{2(\Delta x_o+\Delta y_o)}{\Delta z_o+\Delta x_o-\Delta y_o}$	$\dfrac{2(\Delta x_o+\Delta y_o)}{\Delta z_o+\Delta x_o-\Delta y_o}$
X_1	$4\left[2-L+\sqrt{L^2+8}\right]$	$4\left[L-2+\sqrt{L^2+8}\right]$
Y_1	$4\left[4-L+\sqrt{L^2+8}\right]-\left[4-L+\sqrt{L^2+8}\right]^2$	$4\left[L-4+\sqrt{L^2+8}\right]+\left[L-4+\sqrt{L^2+8}\right]^2$
Z_1	$8-4\left[4-L+\sqrt{L^2+8}\right]+\left[4-L+\sqrt{L^2+8}\right]^2$	$8+4\left[L-4+\sqrt{L^2+8}\right]+\left[L-4+\sqrt{L^2+8}\right]^2$
X_2	$4\left[2-L-\sqrt{L^2+8}\right]$	$4\left[L-2-\sqrt{L^2+8}\right]$
Y_2	$4\left[4-L-\sqrt{L^2+8}\right]-\left[4-L-\sqrt{L^2+8}\right]^2$	$4\left[L-4-\sqrt{L^2+8}\right]+\left[L-4-\sqrt{L^2+8}\right]^2$
Z_2	$8-4\left[4-L-\sqrt{L^2+8}\right]+\left[4-L-\sqrt{L^2+8}\right]^2$	$8+4\left[L-4-\sqrt{L^2+8}\right]+\left[L-4-\sqrt{L^2+8}\right]^2$

Таблица 3 (продолжение)

	3	4
	$\Delta z+\Delta x=2m^2$ $\Delta z-\Delta y=n^2$	$\Delta z-\Delta x=2m^2$ $\Delta z+\Delta y=n^2$
Δx_o	$2mn-n^2$	n^2-2mn
Δy_o	$2m^2-2mn$	$2mn-2m^2$
Δz_o	$n^2-2mn+2m^2$	$n^2-2mn+2m^2$
L	$\frac{2(\Delta x_o-\Delta y_o)}{\Delta x_o+\Delta y_o-\Delta z_o}$	$\frac{2(\Delta y_o-\Delta x_o)}{\Delta z_o+\Delta x_o+\Delta y_o}$
X_1	$4\left[2+L+\sqrt{L^2+8}\right]$	$4\left[2+L+\sqrt{L^2+8}\right]$
Y_1	$\left[(4+L)+\sqrt{L^2+8}\right]^2-4\left[(4+L)+\sqrt{L^2+8}\right]$	$\left[(4+L)+\sqrt{L^2+8}\right]^2-4\left[(4+L)+\sqrt{L^2+8}\right]$
Z_1	$8+\left[(4+L)+\sqrt{L^2+8}\right]^2-4\left[(4+L)+\sqrt{L^2+8}\right]$	$8-\left[(4+L)+\sqrt{L^2+8}\right]^2+4\left[(4+L)+\sqrt{L^2+8}\right]$
X_2	$4\left[2+L-\sqrt{L^2+8}\right]$	$4\left[2+L-\sqrt{L^2+8}\right]$
Y_2	$\left[(4+L)-\sqrt{L^2+8}\right]^2-4\left[(4+L)-\sqrt{L^2+8}\right]$	$\left[(4+L)-\sqrt{L^2+8}\right]^2-4\left[(4+L)-\sqrt{L^2+8}\right]$
Z_2	$8+\left[(4+L)-\sqrt{L^2+8}\right]^2-4\left[(4+L)-\sqrt{L^2+8}\right]$	$8-\left[(4+L)-\sqrt{L^2+8}\right]^2+4\left[(4+L)-\sqrt{L^2+8}\right]$

3. Магистральные направления возможных приращений функции и аргумента

Лучи ПТ(X,Y,Z) определяемые формулами таблицы 3 будем называть **МАГИСТРАЛЬНЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ ПРИРАЩЕНИЙ ФУНКЦИИ И АРГУМЕНТА.**

Рассмотрим пример.

<u>Пример 2</u>. В прямоугольной системе координат задана точка M_o с координатами $x_o=4$, $y_o=3$.Определить магистральные направления бесконечно малых возможных приращений Δx_o, Δy_o, Δz_o .

<u>Решение</u>.

1. $z_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

2. При расчете значений L_i в формулах таблицы 3 вместо значений Δx_o, Δy_o, Δz_o , используем значения $x_o=4$, $y_o=3$, $z_o=5$.

3. Проведем расчет для формул варианта 1 таблицы 3.

3.1 $$L = -\frac{2(x_o + y_o)}{z_o + x_o - y_o} = -\frac{2(4+3)}{5+4-3} = -\frac{7}{3}$$

3.2 Определим значения X_1, Y_1, Z_1.

$$\rightarrow X_1 = 4\left[2 - L + \sqrt{L^2+8}\right] = 4\left[2 + \frac{7}{3} + \sqrt{\frac{49}{9}+8}\right] = 4\,\frac{24}{3} = 32$$

$$Y_1 = 4\left[4 + \frac{7}{3} + \frac{11}{3}\right] - \left[4 + \frac{7}{3} + \frac{11}{3}\right]^2 = 4\cdot 10 - 100 = -60$$

$$Z_1 = 8 - 40 + 100 = 68$$

Обратим внимание на то, что в значениях X_1, Y_1, Z_1 имеет место общий множитель к=8, который можно сократить $\rightarrow X_{11}=8$, $Y_{11}=|-15|$, $Z_{11}=17$

3.3 Определим значения X_2, Y_2, Z_2.

$$\rightarrow X_2 = 4\left[2 - L - \sqrt{L^2+8}\right] = 4\left[2 + \frac{7}{3} - \frac{11}{3}\right] = \frac{8}{3} = \frac{24}{9}$$

$$Y_2 = 4\left[4 + \frac{7}{3} - \frac{11}{3}\right] - \left[4 + \frac{7}{3} - \frac{11}{3}\right]^2 = \frac{32}{3} - \frac{64}{9} = \frac{32}{9}$$

$$Z_2 = \frac{40}{9}$$

Здесь в значениях X_2, Y_2, Z_2 имеется общий множитель к=8/9 $\rightarrow X_{22}=3$, $Y_{22}=4$, $Z_{22}=5$

4. Проведя расчеты, подобные п.п.3, только для всех вариантов таблицы 3 получим результаты, представленные в таблице 4.

Таблица 4.

№ вар.	1	2	3	4
L	-7/3	7/3	1	-1/6
X_{11}	8	4	3	21
Y_{11}	$\|-15\|$	3	4	20
Z_{11}	17	5	5	29
$ПТ_1$	(8,15,17)	(4,3,5)	(3,4,5)	(21,20,29)
X_{22}	3	15	0	$\|-4\|$
Y_{22}	4	8	$\|-4\|$	$\|-3\|$
Z_{22}	5	17	4	5
ПТ2	(3,4,5)	(15,8,17)	(0,4,4)	(4,3,5)

5.Определим магистральные направления для экстремальных случаев

а) n=Var, m=Const

б) n=Const, m=Var

Пусть n=Var, m=Const

В соответствии с формулами (6) $X_1=2L-1$, $Y_1=2L(L-1)$, $Z_1=2L(L-1)+1$,

где $$L=\frac{\Delta y}{\Delta x+\Delta y-\Delta z}$$

При $X_0=4$, $Y_0=3$, $Z_0=5$

$$\rightarrow L=\frac{y_o}{x_o+y_o-z_o}=\frac{3}{4+3-5}=\frac{3}{2}$$

$$\rightarrow X_1=2L-1=3-1=2$$

$$Y_1=2\cdot\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)=\frac{3}{2}$$

$$Z_1=Y_1+1=\frac{5}{2}$$

Здесь в значениях X_1,Y_1,Z_1 имеет место общий множитель к=1/2, сократив который получим

$X_{11}=4$, $Y_{11}=3$, $Z_{11}=5$ т.е. ПТ(4,3,5).

6. Результаты подобного расчета для первых четырех вариантов таблицы 2 представлены в таблице 5. Эти результаты относительно параметра L представлены в таблице 6.

При $X_0=4$, $Y_0=3$, $Z_0=5$ получим значения представленные в таблице 5.

Таблица 5.

№	1	2	3	4
L	$\frac{\Delta y_o}{\Delta x_o + \Delta y_o - \Delta z_o}$	$\frac{\Delta y_o}{\Delta x_o - \Delta y_o + \Delta z_o}$	$\frac{\Delta y_o}{\Delta x_o + \Delta y_o - \Delta z_o}$	$\frac{\Delta y_o}{-\Delta x_o + \Delta y_o + \Delta z_o}$
X_1	1-2L	2L+1	2L-1	2L-1
Y_1	2L(1-L)	2L(L+1)	2L(L-1)	2L(L+1)
Z_1	2L(L-1)+1	2L(L+1)+1	2L(L-1)+1	2L(L+1)+1

Таблица 6

L	3/2	1/2	3/2	¾
X_{11}	4	4	4	20
Y_{11}	3	3	3	21
Z_{11}	5	5	5	29
ПТ	(4,3,5)	(4,3,5)	(4,3,5)	(20,21,29)

7. При формальном подходе в таблице 5 в качестве L может быть принята и величина обратная т.е. например для варианта 2 в таблице 5 имеем

$$L = \frac{\Delta y_o}{\Delta x_o - \Delta y_o + \Delta z_o}$$ величина ей обратная $$L_1 = \frac{1}{L} = \frac{\Delta x_o - \Delta y_o + \Delta z_o}{\Delta y_o}$$

И тогда для варианта 2 будем иметь $X_1=2L_1+1$,
$Y_1=2L_1(L_1+1)$,
$Z_1=Y_1+1$

При $X_0=4$, $Y_0=3$, $Z_0=5$

$$\rightarrow L_1 = \frac{4-3+5}{3} = 2$$

$$\rightarrow X_1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$\rightarrow Y_1 = 2 \cdot 2(2+1) = 12$$

$$\rightarrow Z_1 = 13$$

т.е. получим дополнительный ПТ (5,12,13).

8. В заключении расчетов по примеру 2.

8.1.Исходная точка M(4,3) является вершиной ПТ(4,3,5) с центром в начале координат (Рис.4.3)

8.2.МАГИСТРАЛЬНЫЕ направления бесконечно малых возможных приращений задаются в новой системе координат с центром в точке M_o лучами основных пифагоровых треугольников (в соответствии с результатами проведенного расчета) представленных в таблице 7.

Таблица 7						
№	1	2	3	4	5	6
$ПТ_1$	(12,5,13)	(5,12,13)	(-12,-5,13)	(-12,-5,13)	(12,-5,13)	(-5,-12,13)
$ПТ_2$	(15,8,17)	(8,15,17)	(-15,8,17)	(-15,-8,17)	(15,-8,17)	(-8,-15,17)
$ПТ_3$	(21,20,29)	(20,21,29)	(-21,20,29)	(-21,-20,29)	(21,-20,29)	(-20,-21,29)
$ПТ_4$	(1,0,1)	(0,1,1)	(-1,0,1)	(0,-1,1)	-	-

На этом расчет примера 2 закончен. Обратим внимание на, что в столбце 1 табл.7 имеют место ПТ в полном соответствии с уровнем 2 дерева основных ПТ.

<u>Пример 3</u>. Задана точка M_o (15,17). Определить МАГИСТРАЛЬНЫЕ направления бесконечно малых возможных приращений функции и аргумента.

Решение.

1.Определим $$z_o = \sqrt{x_o + y_o} \quad \to z_o = \sqrt{15^2 + 17^2} = \sqrt{514} = 22{,}671568...$$

т.е. точка M_o (15,17) -не рациональная точка.

2.Для дальнейшего расчета необходимо определить РАЦИОНАЛЬНУЮ точку, находящуюся в непосредственной близости к точке M_o.

2.1. J $z_o - x_o = 2m_o^2$, $z_o - y_o = n_o^2$

$$\to m_o^2 = \frac{22{,}67... - 15}{2} \to m_o = 1{,}958...$$

$$\to n_o^2 = 22{,}67... - 17 \quad \to n_o = 2{,}381....$$

2.2 Ограничим значения m_o и n_o двумя знаками после запятой $\to n_1 = 2{,}38$, $m_1 = 1{,}96$

2.3 Определим координаты рациональной точки M_{o1}

$$\to x_{o1} = n_1^2 + 2m_1n_1 \quad \to x_{o1} = (2{,}38)^2 + 2(2{,}38)(1{,}96) \quad \to x_{01} = 14{,}9940$$

$$y_{o1} = 2m_1^2 + 2m_1n_1 \to y_{o1} = 2(1{,}96)^2 + 2(2{,}38)(1{,}96) \to y_{01} = 17{,}0128$$

$$z_{o1} = y_{o1} + n_1^2 \quad \to z_{01} = 17{,}0128 + (2{,}38)^2 \quad \to z_{01} = 22{,}6772$$

т.о. получили точку $M_{o1}(14{,}9940 ; 17{,}0128)$ – это РАЦИОНАЛЬНАЯ точка, т.к. она лежит на луче ПТ(14,9940 ; 17,0128 ; 22,6772). Это не основной ПТ, т.к. в значениях его элементов имеется общий множитель $k = \frac{4}{10^4}$. Разделим значение каждого из элементов на k получим основной - $ПТ_1$(37485 ; 42532 ; 56693), здесь $x_1 = 37485$, $y_1 = 42532$, $z_1 = 56693$

Точка M_{o1} лежит на луче основного $ПТ_1$. Если каждый из элементов этого $ПТ_1$ умножим на общий множитель $k = \frac{4}{10^4}$ то получим элементы координатного треугольника точки M_{01}.

3.Теперь,имея значения элементов основного ПТ, на луче которого находится точка M_1, проведем первую итерацию, тогда

$$\begin{aligned} x_{11} &= 2z_1 + 2x_1 + y_1 \\ y_{11} &= 2z_1 + x_1 + 2y_1 \qquad (23) \\ z_{11} &= 3z_1 + 2x_1 + 2y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{22} &= 2z_1 - 2x_1 + y_1 \\ y_{22} &= 2z_1 - x_1 + 2y_1 \qquad (24) \\ z_{22} &= 3z_1 - 2x_1 + 2y_1 \\ x_{33} &= 2z_1 + 2x_1 - y_1 \end{aligned}$$

$y_{33}=2z_1+x_1-2y_1$ (25)

$z_{33}=3z_1+2x_1-2y_1$

$x_{44}=|2z_1-2x_1-y_1|$

$y_{44}=|2z_1-x_1-2y_1|$ (26)

$z_{44}=3z_1-2x_1-2y_1$

3.1 $\rightarrow x_{11}=2\cdot 56693+2\cdot 37485+42532=230888$

$y_{11}=2\cdot 56693+37485+2\cdot 42532=235935$

$z_{11}=3\cdot 56693+2\cdot 37485+2\cdot 42532=330113$

$$\rightarrow tg\alpha_{11}=\frac{y_{11}}{x_{11}}=1{,}021859\ ,\qquad tg\alpha_{12}=\frac{x_{11}}{y_{11}}=0{,}9786085$$

3.2 $x_{22}=2z_1-2x_1+y_1=80948$

$y_{22}=2z_1-x_1+2y_1=160965$

$z_{22}=3z_1-2x_1+2y_1=180173$

$$\rightarrow tg\alpha_{22}=\frac{y_{22}}{x_{22}}=1{,}9884987\ ,\qquad tg\alpha_{21}=\frac{1}{tg_{22}}=0{,}5028919$$

3.3 $x_{33}=2z_1+2x_1-y_1=145824$

$y_{33}=2z_1+x_1-2y_1=65447$

$z_{33}=3z_1+2x_1-2y_1=159985$

$$\rightarrow tg\alpha_{33}=\frac{y_{33}}{x_{33}}=0{,}4488081\ ,\qquad tg\alpha_{31}=\frac{1}{tg_{31}}=2{,}2281237$$

3.4 $x_{44}=|2z_1-2x_1-y_1|=4116$

$y_{44}=|2z_1-x_1-2y_1|=9163$

$z_{44}=3z_1-2x_1-2y_1=10045$

$$\rightarrow tg\alpha_{44}=\frac{y_{44}}{x_{44}}=2{,}2261904\ ,\qquad tg\alpha_{41}=\frac{1}{tg_{44}}=0{,}4491978$$

Расчет закончен.

МАГИСТРАЛЬНЫЕ направления бесконечно малых приращений функции и аргумента определяются касательными к исходной точке $M_o(15,17)$, проведенными под углами $\alpha_{11}\div\alpha_{41}$ к оси X. Для определения общего числа МАГИСТРАЛЬНЫХ направлений необходимо учесть шесть возможных направлений в каждой из четвертей системы координат .$\rightarrow\sum=6\cdot 4=24$.

Итого имеем 24 МАГИСТРАЛЬНЫХ направлений от точки $M_o(x_o,y_o)$.

(Здесь направления по осям координат не учитываются !)

Утверждение 2. «Через произвольную рациональную точку $M_i(x_i,y_i)$ декартовой системы координат можно провести не более **24** касательных, что соответствует числу МАГИСТРАЛЬНЫХ направлений бесконечно малых приращений функции и аргумента». Или иначе: «Через произвольную рациональную точку $M_i(x_i,y_i)$ может проходить не более **ДВАДЦАТИ ЧЕТЫРЕХ** различных функций вида $y_j=f_j(x)$.»

ВЫВОД

Через любую произвольную точку системы координат может проходить не более 24 графиков различных функций.

Заключение.

Использование системы mn параметров дает возможность рассматривать рациональные точки(точки с рациональными значениями координат) как пункты в которые может переместиться функция, проходящая через исходную точку. Такой подход к понятию производной в части “когда Δx стремится к нулю “ приводит к выводам

1. Система mn параметров задает дискретность возможных приращений координат
2. Минимальные возможные приращения зависят от магистральных направлений исходящих из начальной точки
3 Конкретное магистральное направление зависит от функции, проходящей через начальную точку
4, Все магистральные направления- лучи, задаваемые направлениями гипотенуз основных пифагоровых треугольников (см. дерево ПТ).

РИСУНКИ

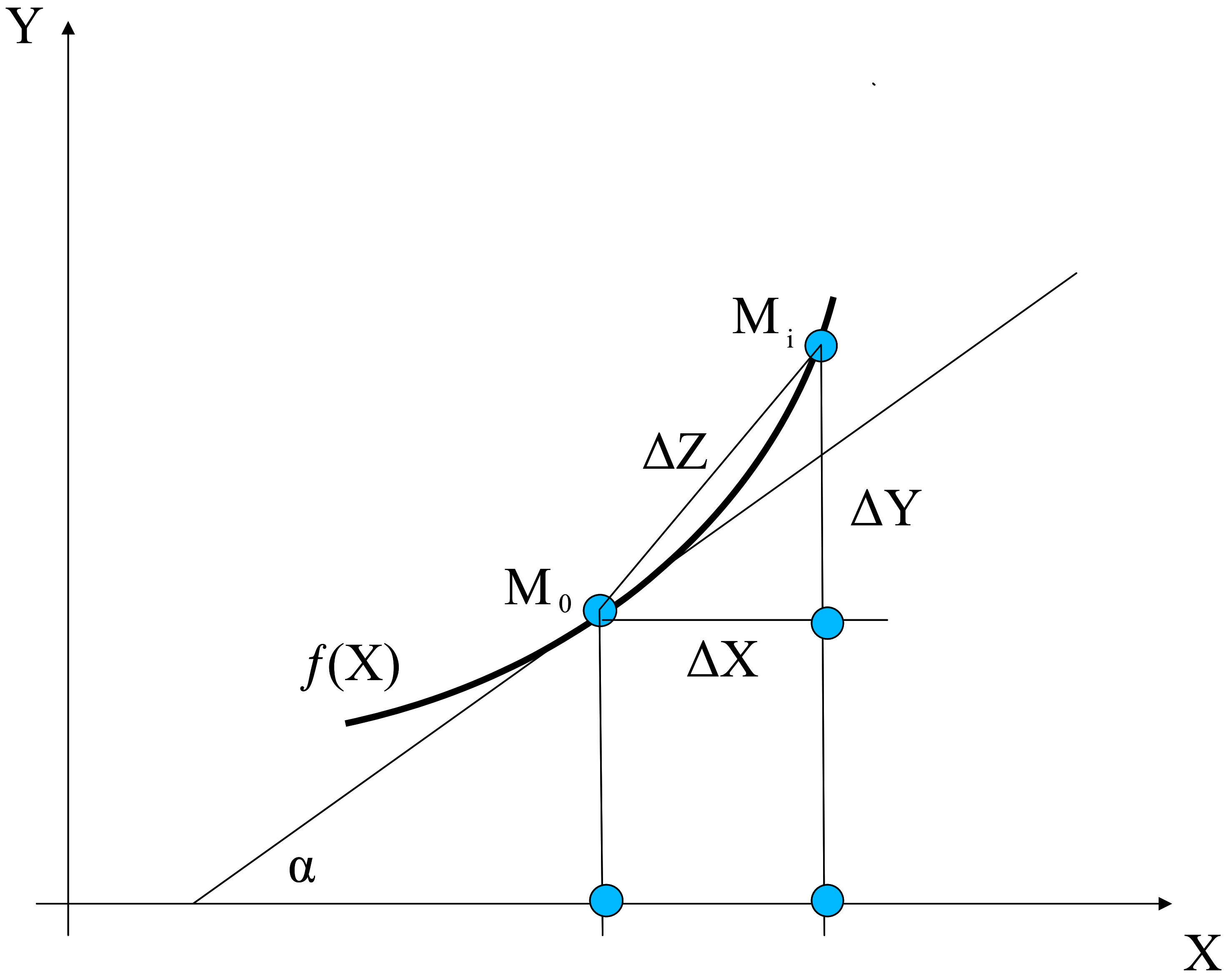

Рис.1 Графическое представление производной

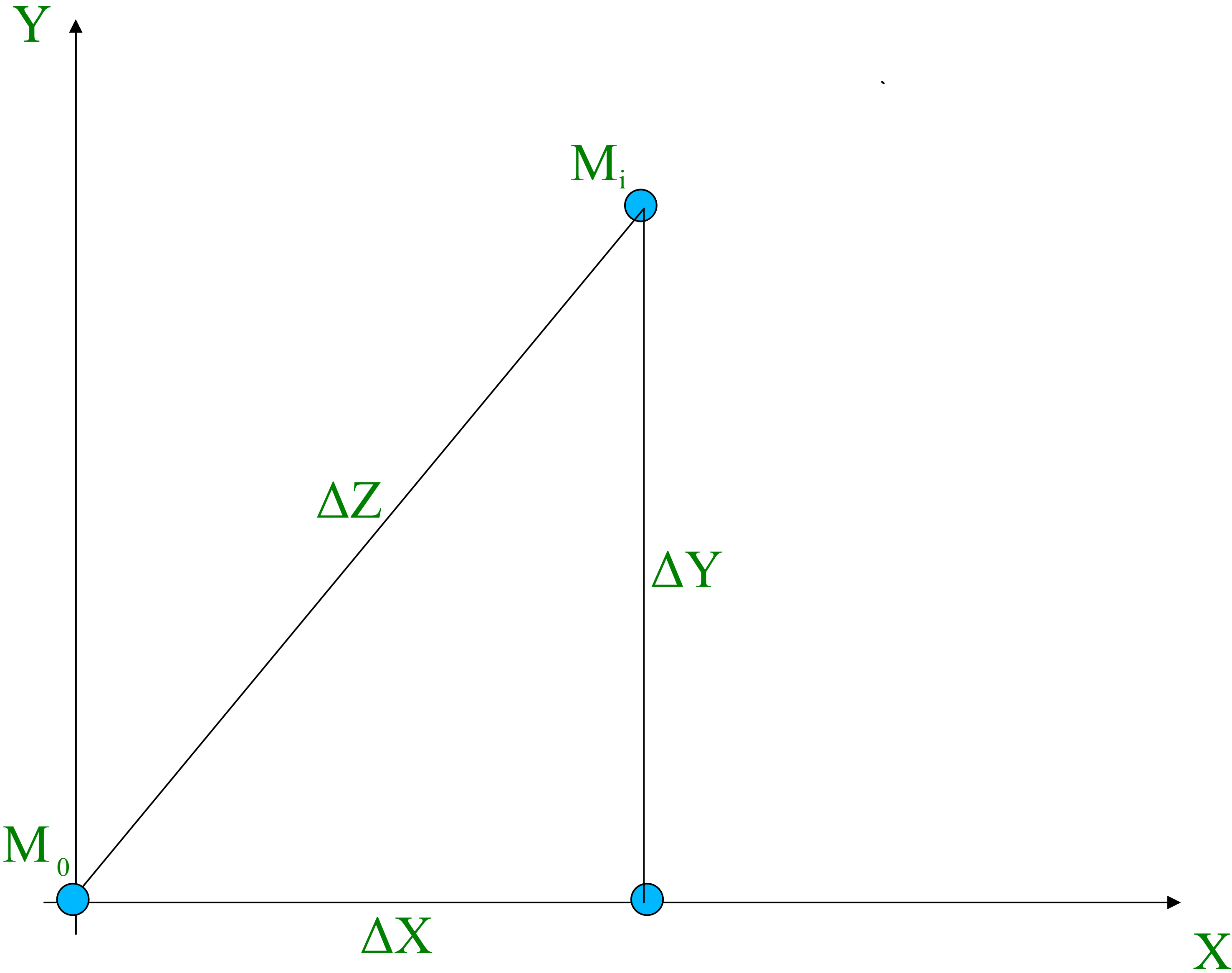

Рис.2 Координатный треугольник приращений

Автор с благодарностью примет все предложения, замечания и пожелания по данной работе.

Тел. 8-81379-33991
(для С-Пб 8-379-33991)

E-mail:fgg-fil1@narod.ru .