

Автор: Фильчев Э.Г.
Адрес:Россия.188760.Ленинградская область
г.Приозерск .ул.Привокзальная 5. кв.60.

Музыкальный ряд в системе m n параметров

На сайте Пифагоров строй (www.px-pict.com/7/3/2/1/8/1.html) в доступной форме показана методика образования современного музыкального ряда

Математическим строем называется совокупность частотных отношений между звуками в музыкальной системе.

Введение в музыкальную практику многоголосых инструментов с фиксированной частотой звуков (орган и др.) заставило композиторов и исполнителей заинтересоваться количественной стороной музыкальных систем.

К этому времени в науке был известен целый ряд звуковых строев, разработанных китайскими, персидскими, индийскими, арабскими и греческими учеными, в основе которых лежали самые разнообразные математические принципы отбора звуков и которые пытались объяснить соотношения между звуками в произведениях народного музыкального творчества.

Мы считаем излишним останавливаться на рассмотрении китайских, персидских, арабских и индийских звуковых строев, так как эти строи не оказали непосредственного влияния на европейскую музыку, а начнем с изучения строя, разработанного древнегреческими учеными и известного под именем "**строя Пифагора**".

Древнегреческим ученым было известно, что на **монохорде** (музыкальный инструмент, состоящий из струны, натянутой на резонансный ящик — прим. ред.) можно получить звуки не только путем возбуждения **целой** струны, но и ее **частей**: $1/2$, $2/3$ и $3/4$, и что звуки, полученные путем возбуждения указанных частей струны, образуют с ее основным тоном интервалы **октавы** — $1/2$ струны, **квинты** — $2/3$ струны и **кварты** — $3/4$ струны (по современной терминологии).

Эти интервалы, найденные опытным путем и получившие, по преданию, применение при настройке лиры Орфея, стали **основными** интервалами пифагорова строя.

Остальные интервалы этого строя были найдены последователями Пифагора посредством **вычислений**.

Трудно сказать, какие причины заставили указанных ученых отказаться от дальнейших делений струны на части в целях получения новых интервалов, известно лишь, что формирование пифагорова строя осуществлялось не опытным, а **математическим** путем.

Этот путь был основан на следующих соображениях: так как $2/3$ **целой** струны дают звук квинтой выше ее **основного** тона, а $3/4$ **целой** струны — звук квартой выше **того же тона**, то $2/3$ **любой части** струны должны дать звук квинтой выше **этой же части**, а $3/4$ **любой части** струны — звук квартой выше **этой части**.

Таким образом, если основной тон струны есть c и если взять $2/3$ от $2/3$ струны, т. е. $4/9$ струны, то звук, соответствующий этой части струны, будет d^1 .

Этот звук находится **за пределами** октавы c — c^1 . Взявши вместо него d , мы найдем, что последнему звуку соответствует $8/9$ струны (перенесение звука на октаву вниз соответствует увеличению длины струны вдвое — прим. ред.)

Если взять $2/3$ от $8/9$ струны, т. е. $16/27$ струны, то звук, соответствующий этой части струны, будет a .

Если взять $\frac{2}{3}$ от $\frac{16}{27}$ струны, т. е. $\frac{32}{81}$ струны, то звук, соответствующий этой части струны, будет e^1 . Этот звук находится за пределами октавы c — c^1 . Взявши вместо него e , мы найдем, что последнему звуку соответствует $\frac{64}{81}$ струны.

Если взять $\frac{2}{3}$ от $\frac{64}{81}$ струны, т. е. $\frac{128}{243}$ струны, то звук, соответствующий этой части струны, будет h .

Если расположить все найденные нами звуки в порядке их высоты и подписать под ними соответствующие части струны, то мы получим **диатоническую мажорную гамму пифагоровой настройки**, в которой частотные отношения между звуками выражены в долях струны:

до	ре	ми	фа	соль	ля	си	до ¹
c	d	e	f	g	a	h	c ¹
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{8}{9}$		$\frac{243}{256}$		$\frac{8}{9}$		$\frac{243}{256}$	
$\frac{8}{9}$		$\frac{8}{9}$		$\frac{8}{9}$			

(зеленым цветом указаны величины интервалов между соответствующими звуками).

Если, исходя из основных интервалов пифагорова строя, двигаться от звука f по чистым квинтам вниз, производя при этом соответствующие вычисления, то мы получим **фригийскую гамму (по средневековой терминологии)**, в которой частотные отношения между звуками выражены в долях струны:

до	ре-бем.	ми-бем.	фа	соль	ля-бем.	си-бем.	до ¹
c	des	es	f	g	as	b	c ¹
1	$\frac{243}{256}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{243}{256}$		$\frac{8}{9}$		$\frac{243}{256}$		$\frac{8}{9}$	
$\frac{8}{9}$		$\frac{8}{9}$		$\frac{8}{9}$			

Двигаясь по чистым квинтам вверх от звука h и по чистым квинтам вниз от звука des и производя соответствующие вычисления, мы придем в первом случае к звуку his , а во втором — к звуку $deses$.

Звук his на интервал $\frac{524288}{531441}$ (который приблизительно равен дроби $\frac{73}{74}$) выше звука c^1 , а звук $deses$ — на тот же интервал ниже звука c .

Интервал, на который his выше c^1 , а $deses$ ниже c получил название "**пифагоровой коммы**", что составляет около $\frac{1}{9}$ тона (коммой называется интервал, меньший $\frac{1}{8}$ целого тона). Таким образом, строй Пифагора — **незамкнутый**.

Так как каждый интервал пифагорова строя получается посредством того или иного количества квинтовых ходов (вверх или вниз от исходного звука c последующими октавными перенесениями), то каждый интервал этого строя имеет **только одно количественное выражение**, так:

(1) б. секунда, получаемая посредством **двух** квинтовых ходов, выражается

отношением 8/9;

(2) б. секста, получаемая посредством **трех** квинтовых ходов, выражается отношением 16/27;

(3) б. терция, получаемая посредством **четырёх** квинтовых ходов, выражается отношением 64/81;

(4) диатонический полутон, получаемая посредством **пяти** квинтовых ходов, выражается отношением 243/256;

(5) хроматический полутон, получаемая посредством **семи** квинтовых ходов, выражается отношением 2048/2187.

Так как 2048/2187 меньше 243/256 струны, то хроматический полутон пифагорова строя больше диатонического на пифагорову комму.

Так как все интервалы пифагорова строя (за исключением октавы) являются производными от чистой квинты, то пифагоров строй есть строй **однофакторный**.

На Рис.1 представлена схема реализации октавы, квинты и кварты.

Алгоритм организации последовательности звуков

Основной ряд	$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$	1	звук	ДО
Квинта от квинты	$\rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$			
Переход на удвоенный звук	$\rightarrow \frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9}$		звук	РЕ
$\frac{2}{3}$ от $\frac{8}{9}$	$\rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{27}$		звук	ЛЯ
$\frac{2}{3}$ от $\frac{16}{27}$	$\rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{27} = \frac{32}{81}$			
Переход на удвоенный звук	$\rightarrow \frac{32}{81} \cdot 2 = \frac{64}{81}$		звук	МИ
$\frac{2}{3}$ от $\frac{64}{81}$	$\rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{64}{81} = \frac{128}{243}$		звук	СИ
			звук	ФА
			звук	СОЛЬ

Представляет интерес использовать систему mn параметров для построения музыкального ряда по методике указанного сайта, Может возникнуть вопрос **“Зачем это надо?”**. Прежде, чем ответить на этот вопрос, произведем краткий анализ частот современного музыкального ряда. Основой этого ряда является простой подход к частотным градациям монохорды. Однако математическая объективность такого подхода является недоказуемой. Именно поэтому в науке был известен целый ряд звуковых строев, разработанных китайскими, персидскими, индийскими, арабскими и греческими учеными, в основе которых лежали самые разнообразные математические принципы отбора звуков.

В системе mn параметров базовой основой музыкального ряда является объективное свойство цикличности сторон прямоугольного треугольника. На первом уровне дерева ПТ имеем триаду ПТ₀(4, 3, 5), ПТ₁₁(21, 20, 29), ПТ₁₂(15, 8, 17), ПТ₁₃(12, 5, 13). Фрагмент дерева ПТ представлен на Рис.2.

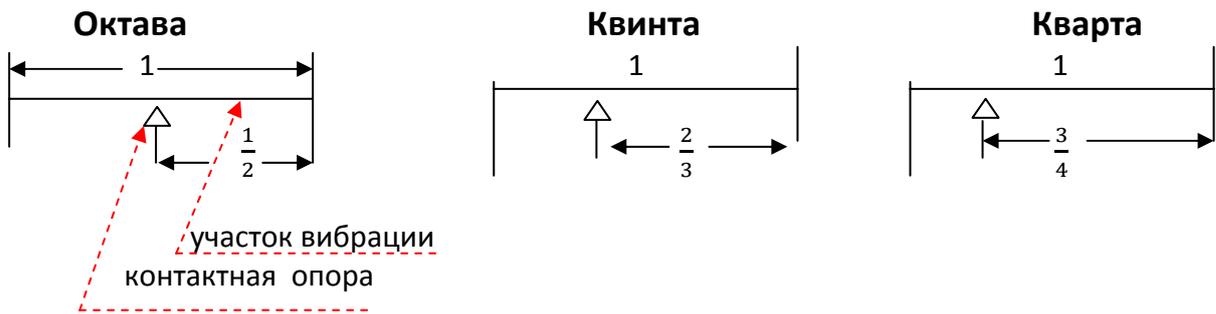


Рис.1 Схема участков монохорды

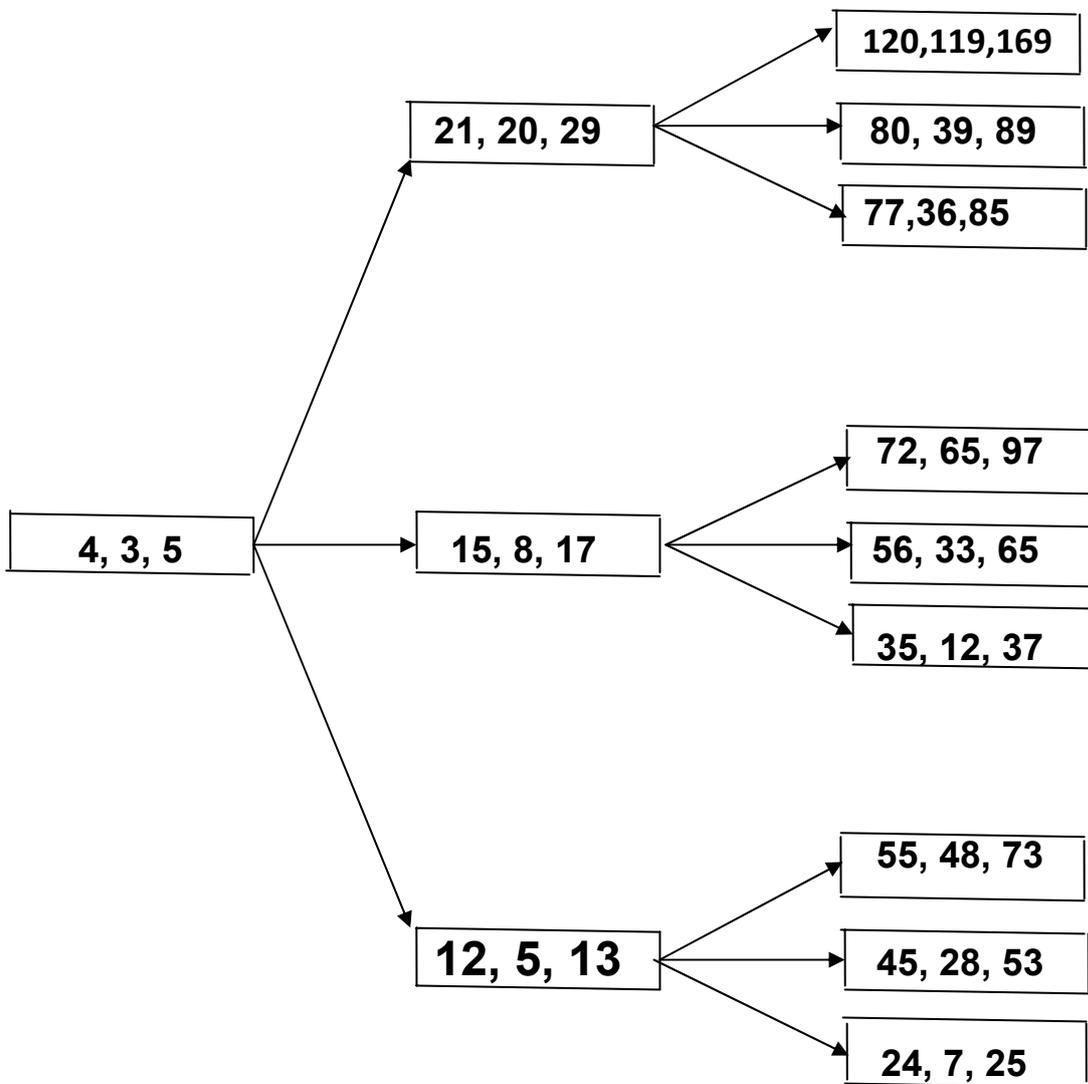


Рис.2 Фрагмент дерева ПТ

Теперь, имея строгие численные значения элементов ПТ, можно перейти к значениям $\sin(\alpha) = \frac{y}{z}$, $\cos(\alpha) = \frac{x}{z}$, $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{y}{x}$. Тогда, на основании фрагмента ПТ (Рис.2), получим Рис.3, Рис.4, Рис.5.

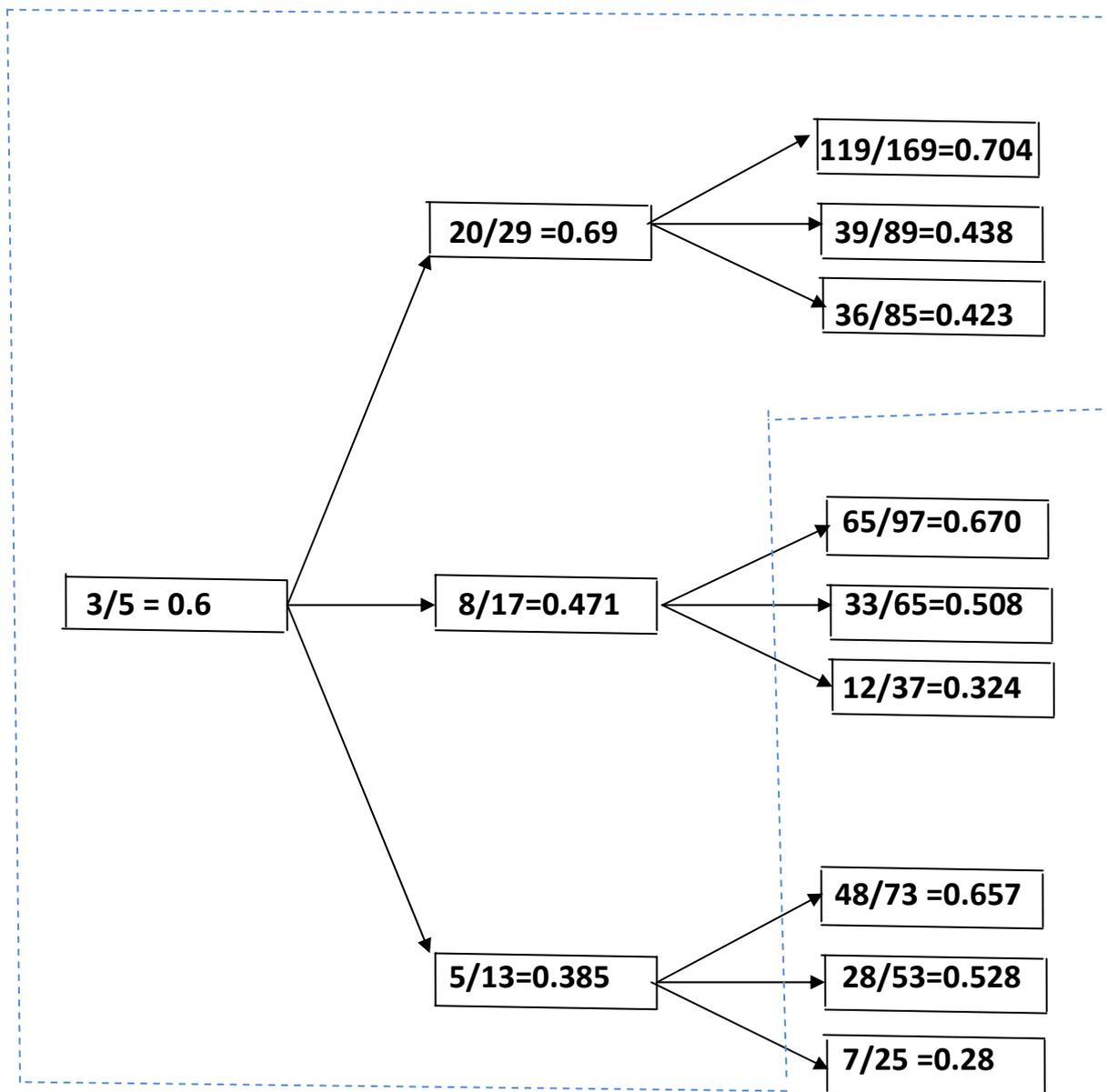


Рис.3 Музыкальный ряд на основе синуса дерева ПТ

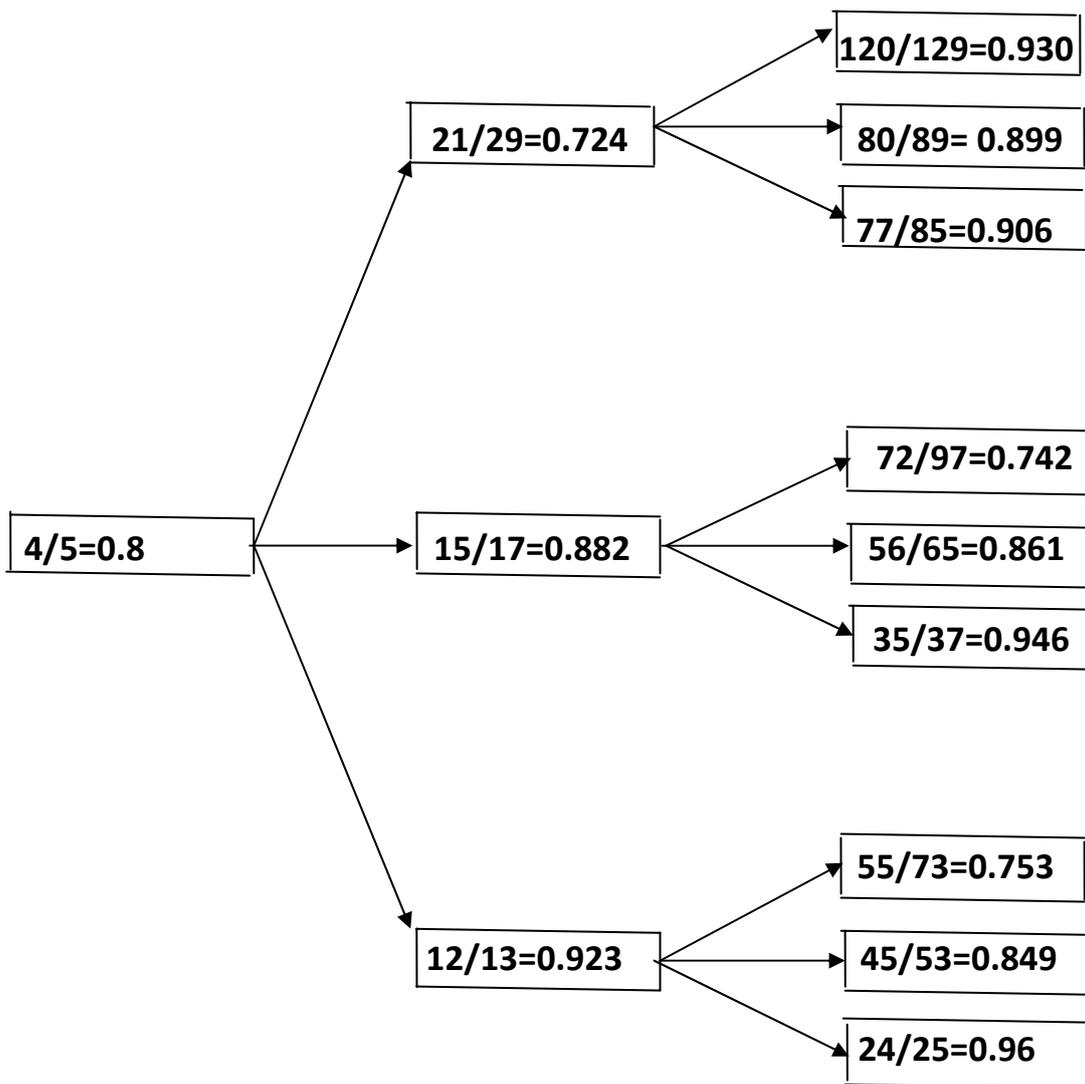


Рис.4 Музыкальный ряд на основе косинуса дерева ПТ

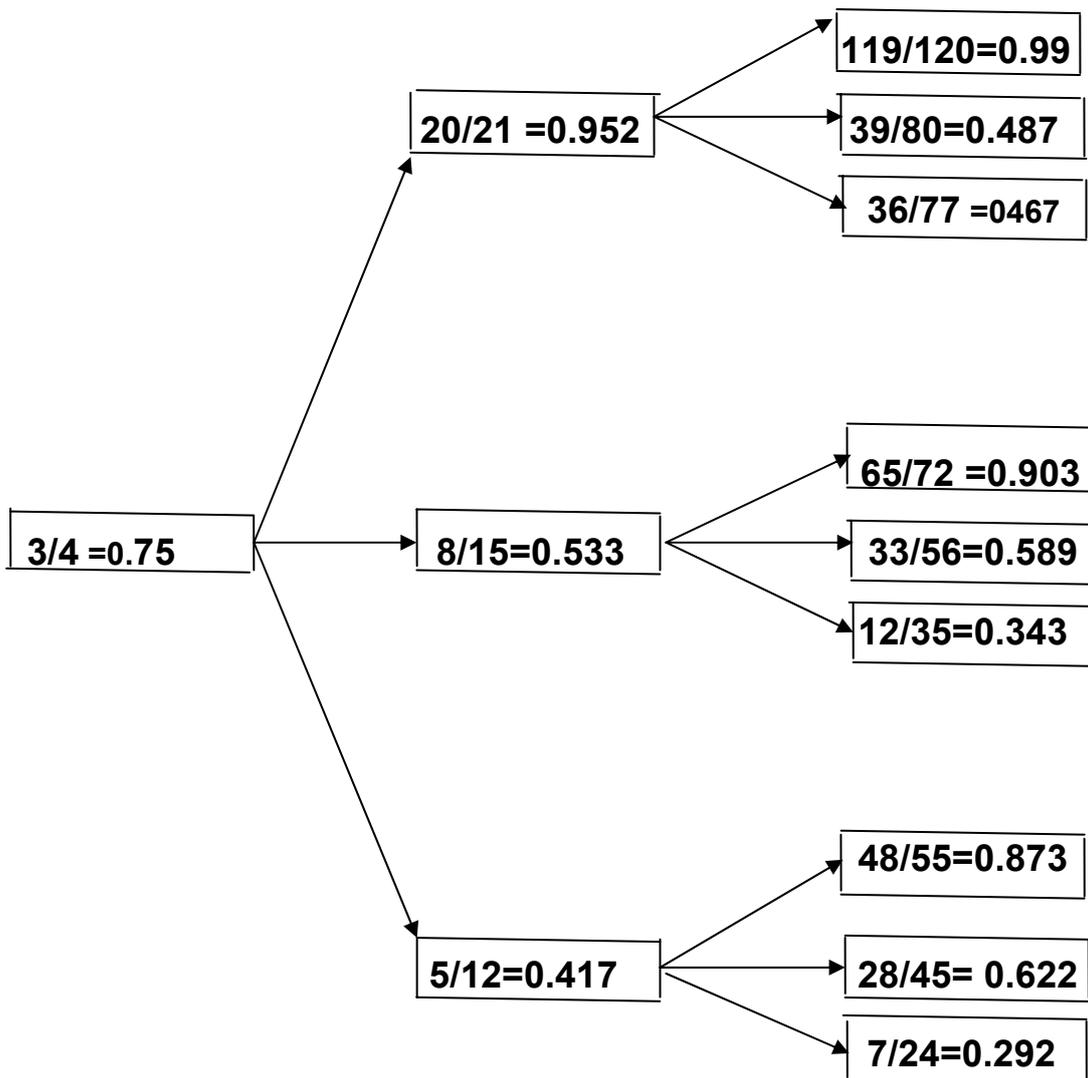


Рис.5 Музыкальный ряд на основе тангенса дерева ПТ

На рисунках 3, 4, 5 представлены дробные числа. Если эти числа считать долями **монохорды**, то получим **музыкальный ряд** .

В таблице 1 представлены результаты частей монохорды современного музыкального ряда и полных музыкальных рядов составленных на основе дерева ПТ. В настоящее время нашло применение семизначное ограничение музыкального ряда, от звука “**до**” до звука “**си**”. Поэтому, для построения семизначного музыкального ряда, можно ограничиться только одной из последних триад дерева ПТ (Рис.3. см. область ограниченную пунктирной линией). Из Рис.3 видно, что можно создать 9 таких семизначных рядов(см. Таблица 2).

Таблица 1

Тип ряда	до	ре	ми	фа	соль	ля	си	---	---	---	---	---	---
Современ	1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	---	---	---	---	---	---
Sin α ПТ	119/169	20/29	65/97	48/73	3/5	28/53	33/65	36/85	8/17	39/89	5/13	12/37	7/24
Cos α ПТ	24/25	35/37	120/129	12/13	77/85	80/89	15/17	56/65	45/53	4/5	55/73	72/97	21/29
tg α ПТ	119/120	20/21	65/72	48/55	3/4	28/45	33/56	8/15	39/80	36/77	5/12	12/35	7/24

Таблица 2

№ n/n	тип ряда	до	ре	ми	фа	соль	ля	си
	Современ	1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243
1	Sin α ПТ верхняя	119/169	20/29	3/5	8/17	39/89	36/85	5/13
2	Sin α ПТ средняя	20/29	65/97	3/5	33/65	8/17	5/13	12/37
3	Sin α ПТ нижняя	20/29	48/73	3/5	28/53	8/17	5/13	7/25
4	Cos α ПТ верхняя	120/129	12/13	77/85	80/89	15/17	4/5	21/29
5	Cos α ПТ средняя	33/37	12/13	15/17	56/65	4/5	72/97	21/29
6	Cos α ПТ нижняя	24/25	12/13	15/17	45/53	4/5	55/73	21/29
7	tg α ПТ верхняя	119/120	20/21	3/4	8/15	39/80	36/77	5/12
8	tg α ПТ средняя	20/21	65/72	3/4	33/56	8/15	5/12	12/35
9	tg α ПТ нижняя	20/21	48/55	3/4	28/45	8/15	5/12	7/24

Выводы

1. Использование системы mn параметров для формирования звуковых рядов реализует объективное свойство дерева ПТ в акустической форме
 2. Эти звуковые ряды дают возможность более гармоничного звучания и восприятия мелодий в связи с линейностью и объективностью (включая "золотое сечение") итерационных формул дерева ПТ
 3. Использование системы mn параметров для формирования звуковых рядов реализует возможность создания 12 звуковых рядов.
 4. Использование системы mn параметров для формирования звуковых рядов реализует возможность комфортного восприятия мелодий.
- Автор с благодарностью примет конкретные предложения, замечания и оценки.