Автор: Фильчев Э.Г.
Адрес:Россия.188760.Ленинградская область г.Приозерск .ул.Привокзальная 5. кв.60.

Прямое и обратное преобразование степенной функции в системе mn параметров

Прямое преобразование

Прямое преобразование реализуется с помощью формулы (1).

$$\frac{y^{(k)}}{k!}(2mn)^{k-1}+\frac{y^{(k-1)}}{(k-1)!}(2mn)^{(k-2)}+\ldots+\frac{y'}{1!}(2mn)^{0}=0\,, \qquad (1)$$

где $y^{(k)}$-k-ая производная функции **y** по **x.**

Вывод 1. Использование преобразования по формуле (1) приводит к новому уравнению с показателем степени на единицу меньше исходного уравнения.

Вывод формулы см. сайт fgg-fil1.narod.ru\ fmat16

Квадратное уравнение

Пусть имеем функцию $\mathbf{y=x^2+bx+c}$ (2)

→ $y'=2x+b$

$y''=2$

Подставив эти выражения в формулу (1) , получим

$$(2mn)+2x+b=0$$

→ $(2mn) = -(2x+b)$ (3)

Уравнение (3) – это уравнение прямой.

При x = 0 → (2mn) = - b . При (2mn) = 0 → x = - 0.5 · b, т.е. в координатах (x, 2mn) получили треугольник “золотого сечения “ (Рис.1) .

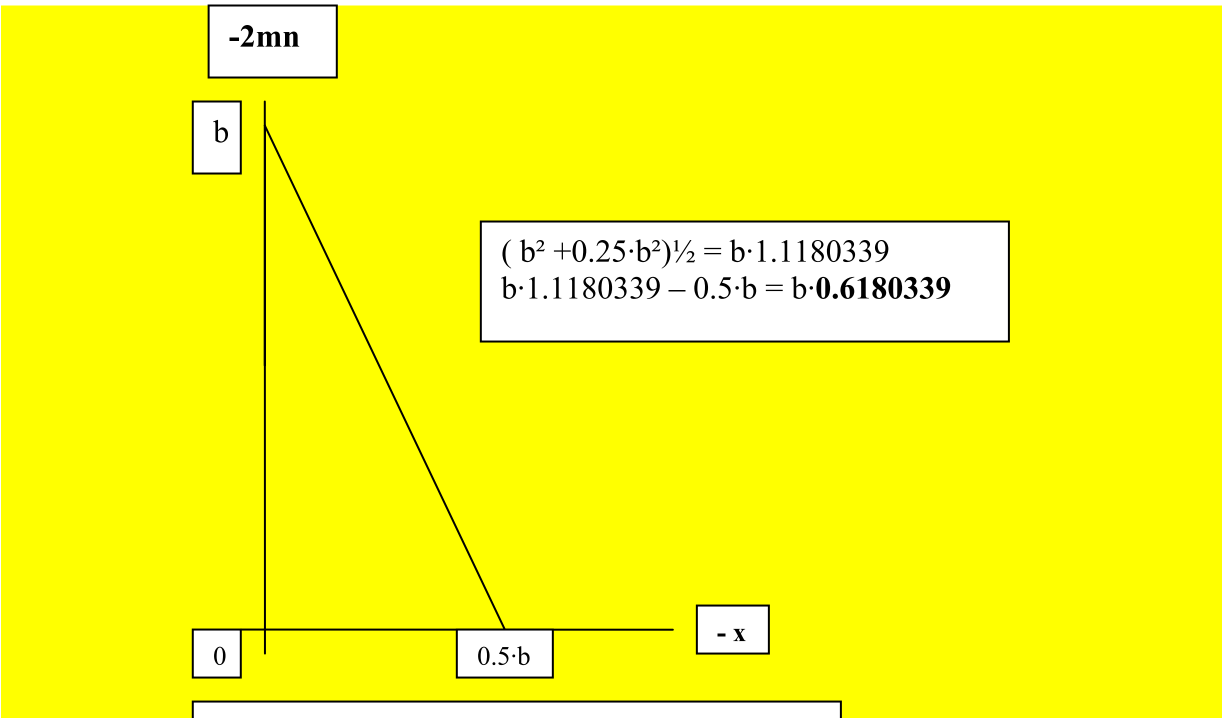

Рис.1. Треугольник золотого сечения

Вывод 2. Использование mn преобразования для любого квадратного уравнения с действительным значением коэффициента при x приводит к треугольнику “золотого сечения “.

Из уравнения (3)

$\rightarrow$ $$x = \frac{(2mn)-b}{2}$$

Подставив это выражения в формулу (2) и приравняв y=0, получим

$$[(2mn)-b]^2 +2b[(2mn)-b]+4c=0$$

$\rightarrow$ $$(2mn)^2 - 2(2mn)b+b^2+2(2mn)b-2b^2+4c=0$$

$\rightarrow$ $$(2mn)^2 = b^2-4c$$

$\rightarrow$ $$(2mn) = \pm\sqrt{b^2-4c} \qquad (4)$$

где $$(2mn) = \pm(x_1-x_2) \qquad (5)$$

x_1,x_2-корни уравнения (2).

Подставив выражение (4) в формулу (3), получим классическую формулу решения квадратного уравнения

$$X_{1,2}=\frac{1}{2}(-b\pm\sqrt{b^2-4c}).$$

Кубическое уравнение

Пусть имеем функцию $$\mathbf{y=x^3+bx^2+cx+d} \qquad (6)$$

Первая итерация

$\rightarrow$ $$y_1'=3x^2+2bx+c$$
$$y_1''=6x+2b$$
$$y_1'''=6$$

$\rightarrow$Подставив эти выражения в формулу (1) , получим

$$\frac{6}{3\bullet 2}\bullet(2mn)^2+\frac{6x+2b}{2}\bullet(2mn)+3x^2+2bx+c=0$$

$\rightarrow$ $$(2mn)^2 + (3x +b)\cdot 2mn + 3x^2+2bx+c = 0 \qquad (7)$$

Вторая итерация

$$y_2' = 2\cdot(2mn) + (3x +b)$$
$$y_1'' = 2$$

$\rightarrow$ $$(\mathbf{2mn}) + 2\cdot(2mn) + (3x +b) = 0,$$

где x - любой из корней уравнения (6)

$(2mn) = (x_i - x_j)$

x_i , x_j – любая пара корней уравнения (6)

(**2mn**) = $(2mn)_1 - (2mn)_2$

$(2mn)_1, (2mn)_2$ – корни уравнения (7)

Вывод 3. Использование mn преобразования для степенной функции дает возможность организации итерационного процесса последовательного снижения показателя степени переменной.

Пример 1. Пусть имеем уравнение $\mathbf{x^3- 4.2x^2 - 6.4x+12 = 0.}$

Здесь $x_1 = - 2$, $x_2 = 1.2$, $x_3 = 5 \rightarrow (2mn)_1= (x_1 - x_2) = - 2 - 1.2 = - 3.2$

$(2mn)_2= (x_1 - x_3) = - 2 - 5 = - 7$, $(2mn)_3= (x_3 - x_2) = 5 - 1.2 = 3.8.$

На основании уравнения (7) $\rightarrow(2mn)^2 + (3x - 4.2)\cdot 2mn + 3x^2- 8.4x - 6.4 = 0$ (8)

1. Подставим $x_1 = - 2$ в уравнение (8)

$\rightarrow (2mn)^2 + (- 6 - 4.2)\cdot 2mn + 3\cdot(- 2)^2- 8.4\cdot(- 2) - 6.4 = 0$

$\rightarrow (2mn)^2 - (10.2)\cdot 2mn + 12+16.8 - 6.4 = 0 \rightarrow (2mn)_{1,2} = 5.1 \pm (26.01 - 22.4)^{½}$

$\rightarrow (2mn)_1 = 5.1 + 1.9 = 7$, $(2mn)_2 = 5.1 - 1.9 = 3.2$.

2. Подставим $x_2 = 1.2$ в уравнение (8)

$\rightarrow (2mn)^2 + (3.\ 6 - 4.2\ )\cdot 2mn + 3\cdot(\ 1.\ 2\ )^2 - 8.4\cdot(\ 1.\ 2\ ) - 6.4 = 0$

$\rightarrow (2mn)^2 - (0.6)\cdot 2mn + 4.32 - 10.08 - 6.4 = 0 \ \rightarrow (2mn)_{1,2} = 0.3 \pm (\ 0.09 + 12.16)^{½}$

$\rightarrow\ (2mn)_3 = 0.3 + 3.5 = 3.8$, $(2mn)_4 = 0.3 - 3.5 = -\ 3.2$.

3. Подставим $x_3 = 5$ в уравнение (8)

$\rightarrow (2mn)^2 + (15 - 4.2\ )\cdot 2mn + 3\cdot(\ 5\ )^2 - 8.4\cdot(\ 5\ ) - 6.4 = 0$

$\rightarrow (2mn)^2 + (10.8)\cdot 2mn + 75 - 42 - 6.4 = 0 \ \rightarrow (2mn)_{1,2} = -\ 5.4 \pm (\ 29.16 - 26.6)^{½}$

$\rightarrow\ (2mn)_5 = -\ 5.4\ + 1.6 = -\ 3.8$, $(2mn)_6 = -\ 5.4 - 1.6 = -\ 7$.

Из данного расчета видно, что параметр $(2mn)_k = |\ (\ x_i - x_j)\ |$, т.е. равен разности любой пары корней исходного кубического уравнения.

Вывод 4. **Параметр (2mn) для степенной функции равен разности любой пары корней исходного уравнения.**

Задавая различные значения “ x “ в уравнение (7), можно построить эллипс допустимых действительных значений корней исходного уравнения .
Рассматривая экстремальные случаи уравнения (7)можно получить координаты 12 точек этого эллипса (Табл.1).

Таблица1

№ точки	*X*	*(2mn)₁*	*(2mn)₂*
1	[-b – 2 (b² – 3c)½] / 3	(b² – 3c)½	(b² – 3c)½
2,12	[-b – (3b² – 9c)½] / 3	[2 (3b² – 9c)½] / 3	[(3b² – 9c)½] / 3
3,11	[-b – (b² – 3c)½] / 3	(b² – 3c)½	0
4,1	- b/ 3	[(3b² – 9c)½] / 3	-[(3b² – 9c)½] / 3
5,9	[-b + (b² – 3c)½] / 3	0	- (b² – 3c)½
6,8	[-b + (3b² – 9c)½] / 3	- [(3b² – 9c)½] / 3	- [2 (3b² – 9c)½] / 3
7	[-b + 2(b² – 3c)½] / 3	- (b² – 3c)½	- (b² – 3c)½

Пример 2. Пусть имеем, в качестве исходного, уравнение

$$X^3 - 11X^2 + 31X - 21 = 0$$

Здесь $b = -\ 11,\ c = 31\ ,\ d = -21 \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3\ ,\ x_3 = 7.$

Подставив значения b = - 11, c = 31 в таблицу 1, получим таблицу 2.

Подставив значения b = - 11, c = 31 в формулу (7) получим уравнение

$$(2mn)^2 + (3x - 11\ )\cdot 2mn + 3x^2 + -22x + 31 = 0$$

Эллипс, построенный по данным таблицы 2, представлен на Рис.1.

Таблица 2

№ точки	*X*	*(2mn)₁*	*(2mn)₂*
1	0.139	5.2915	5.2915
2,12	0.6116	6.11	3.055
3,11	1.9028	5.2915	0
4,1	- 3.6667	3.055	- 3.055
5,9	5.4305	0	-5.2915
6,8	6.7317	- 3.055	- 6.11
7	7.1943	- 5.2915	- 5.2915

Вывод 5. Использование преобразования по формуле (1) приводит к уравнению эллипса допустимых действительных корней кубического уравнения.

Решая уравнение (7) , получим

$$\rightarrow \qquad (2mn)_{1,2}=\frac{1}{2}[-(3x+b)\pm\sqrt{(3x+b)^2-4(3x^2+2bx+c)}] \qquad (8)$$

$$\rightarrow \qquad (2mn)_{1,2}=\frac{1}{2}[-(3x+b)\pm\sqrt{9x^2+6bx+b^2-12x^2-8bx-4c}]$$

$$\rightarrow \qquad (2mn)_{1,2}=\frac{1}{2}[-(3x+b)\pm\sqrt{b^2-3x^2-2bx-4c}] \qquad (9)$$

Запишем уравнение (6) относительно x

$$\rightarrow \qquad x^2+\frac{1}{3}[2b+3(2mn)]x+\frac{1}{3}[(2mn)^2+b(2mn)+c]=0$$

$$\rightarrow \quad x_{1,2}=-\frac{1}{6}\left[2b+3(2mn)\pm\sqrt{4b^2+12b(2mn)+9(2mn)^2-12(2mn)^2-12b(2mn)-12c}\right]$$

$$\rightarrow \qquad x_{1,2}=-\frac{1}{6}\left[2b+3(2mn)\pm\sqrt{4b^2-3(2mn)^2-12c}\right] \qquad (10)$$

Подставив это значение x в уравнение (5), после простых, но громоздких преобразований, получим

$$(2mn)^6+2(3c-b^2)(2mn)^4+(3c-b^2)^2(2mn)^2+\frac{4(3c-b^2)^3-(2b^3-9bc+27d)^2}{27}=0 \quad (11)$$

2mn

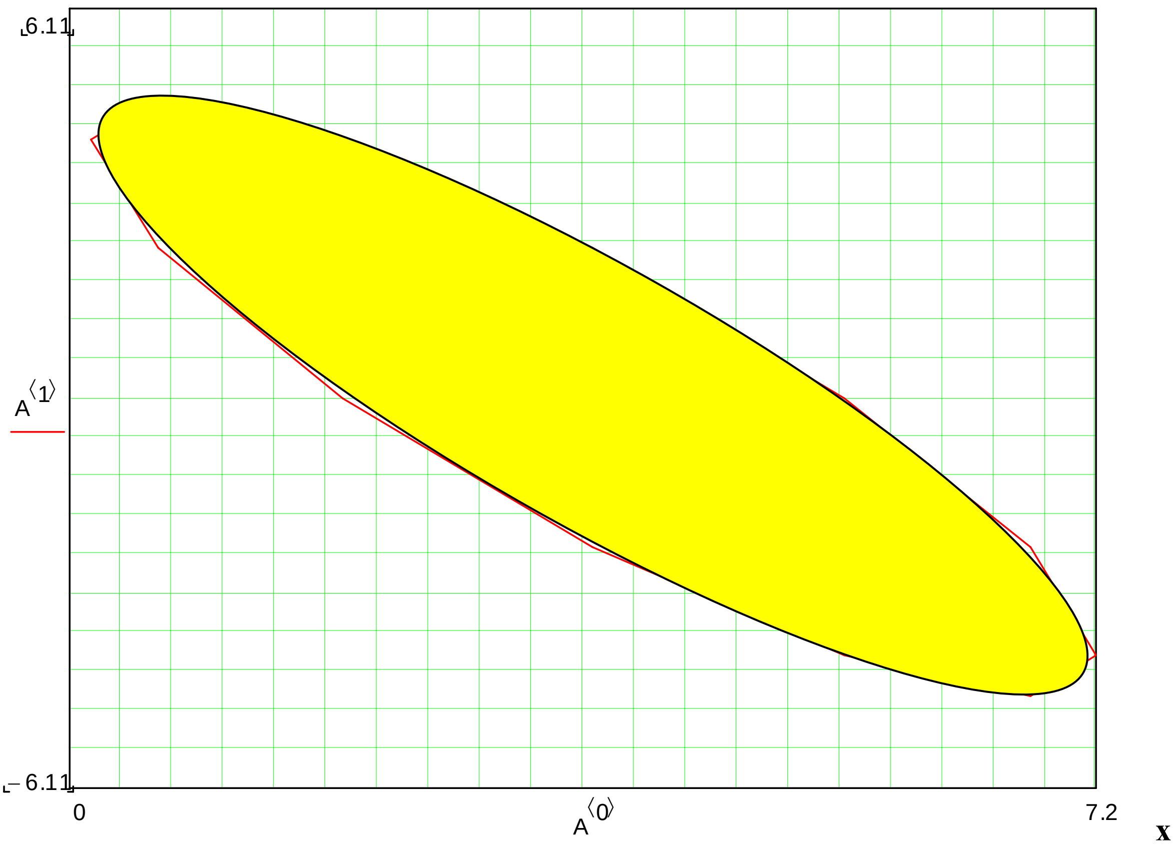

Рис.2 Эллипс допустимых значений нулей для уравнения $X^3 - 11X^2 + 31X - d = 0$

Введем обозначение $\mathbf{L=(2mn)^2=(x_i-x_j)^2}$ (12)

где x_i,x_j- любая пара корней уравнения (6).

$$\rightarrow \quad L^3+2(3c-b^2)L^2+(3c-b^2)^2L+\frac{4(3c-b^2)^3-(2b^3-9bc+27d)^2}{27}=0. \quad (13)$$

Из этого следует утверждение

Утверждение1 " Для любого кубического уравнения вида

$$\mathbf{X^3 + bX^2 + c\,X + d = 0}$$

имеют место уравнения с коэффициентами взаимно-связанными с коэффициентами исходного уравнения

$$\mathbf{(2mn)^2 + (3x + b)\cdot 2mn + 3x^2+2bx+c = 0}$$

$$\mathbf{L^3+2(3c-b^2)L^2+(3c-b^2)^2L+\frac{4(3c-b^2)^3-(2b^3-9bc+27d)^2}{27}=0},$$

где (2mn) – разность любой пары корней исходного уравнения

L - квадрат разности любой пары трех корней исходного уравнения

x - любой из корней исходного уравнения. ".

Обозначим $\mathbf{F_1} = \frac{4(3c-b^2)^3-(2b^3-9bc+27d)^2}{27}$ **(14)**

Формулу (13) можно применить для организации итерационного процесса. Если использовать коэффициенты формулы (13),тогда вместо “ b “ в формуле (14) следует записать **$2(3c-b^2)$, вместо “c “- $(3c-b^2)^2$, вместо “d “-** $\frac{4(3c-b^2)^3-(2b^3-9bc+27d)^2}{27}$ **.**

Вывод 6. Использование преобразования по формуле (1) приводит к новому кубическому уравнению , где в качестве переменной имеет место квадрат разности любой пары корней исходного уравнения.

Вывод 7. Использование преобразования по формуле (1) приводит к возможности организации итерационного процесса создания цепочки кубических уравнений, где в качестве переменной имеет место квадрат разности любой пары корней предыдущего итерационного уравнения.

Проведем анализ уравнения (10)

$$x_{1,2}=-\frac{1}{6}\left[2b+3(2mn)\pm\sqrt{4b^2-3(2mn)^2-12c}\right]$$

1. При наличии двух одинаковых корней исходного кубического уравнения имеем

$$2mn = 0 \ \rightarrow\ x_{1,2}=-\frac{1}{6}\left[2b\pm\sqrt{4b^2-12c}\right] = -\ \frac{1}{3}\left[b\pm\sqrt{b^2-3c}\right]$$

Так, например, пусть имеем в качестве исходного уравнения $x^3 - 12x^2 + 41{,}25x - 43.75 = 0$.

Здесь $b = -12$, $c = 41.25$ $\rightarrow$ $\sqrt{4b^2-12c} = \sqrt{4(12)^2-12\bullet 41.25} = 9$

$\rightarrow$ $x_{1,2} = -\ \frac{1}{6}\left[-24\pm 9\right]$ $\rightarrow x_1 = 2.5$, $x_2 = 5{,}5$ (этот корень не подходит).

$\rightarrow$ $(x^3 - 12x^2 + 41.25x - 43.75) = (x-2.5)^2\cdot(x-7) = 0$

Вывод 8. При наличии двух одинаковых корней исходного кубического уравнения имеем

$2mn = 0 \ \rightarrow\ x_{1,2}=-\frac{1}{6}\left[2b\pm\sqrt{4b^2-12c}\right]$, где хотя бы один из этих корней является решением исходного уравнения.

Вывод 7. Действительность значений $x_{1,2}$ накладывает ограничения на значение подкоренного выражения, а именно $4b^2 \ge 12c + 3(2mn)^2 \rightarrow (4b^2 - 12c) \ge 3(2mn)^2$.

Для раскрытия сущности уравнений (7) и (11), **рассмотрим пример в котором корни исходного кубического уравнения известны.**

Пример 3. Пусть имеем уравнение **$X^3 - 11.5X^2 + 36X - 31.5 = 0$.**

Здесь $b = -11.5$, $c = 36$, $d = -31.5$

Корнями этого уравнения являются $X_1 = 1.5$, $X_2 = 3$, $X_3 = 7$.

$$\rightarrow \quad F = \frac{4(108-132.25)^3-(-3041.75+3726-850.5)^2}{27} = \mathbf{1089}$$

1. Составим уравнение (7) $\rightarrow$ $(2mn)^2 + (3x+b)\cdot 2mn + 3x^2 + 2bx + c = 0$

$\rightarrow (2mn)^2 + (3x - 11.5)\cdot 2mn + 3x^2 - 23x + 36 = 0$.

2.Определим $(b^2 - 3c)^{½} = (132.25 - 108)^{½} = 4.9244$

3 Определим $\frac{1}{3}\left[-b+2\sqrt{b^2-3c}\right] \ge x_i \ge \frac{1}{3}\left[-b-2\sqrt{b^2-3c}\right]$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{3}\left[11.5+2\bullet 4.9244\right] \ge x_i \ge \frac{1}{3}\left[11.5-2\bullet 4.9244\right]$$

Следовательно, все три корня исходного кубического уравнения находятся в интервале

$$7.1163 \geq x_i \geq 0.5504$$

Здесь x_i - значение любого из корней исходного уравнения.

4. Определим $\frac{1}{3}\left[-b-2\sqrt{b^2-3c}\right] \geq x_{\min} \geq \frac{1}{3}\left[-b-\sqrt{b^2-3c}\right]$

$$\rightarrow \qquad \frac{1}{3}[11.5-4.9244] \geq x_{\min} \geq \frac{1}{3}[11.5-2 \bullet 4.9244]$$

$$\rightarrow \qquad 2.1919 \geq x_{\min} \geq 0.5504$$

5. Определим $\frac{1}{3}\left[-b+\sqrt{b^2-3c}\right] \geq x_{сред} \geq \frac{1}{3}\left[-b-\sqrt{b^2-3c}\right]$

$$\rightarrow \qquad \frac{1}{3}[11.5+4.9244] \geq x_{сред} \geq \frac{1}{3}[11.5-4.9244]$$

$$\rightarrow \qquad 5.4748 \geq x_{сред} \geq 2.1919$$

6. Определим $\frac{1}{3}\left[-b+2\sqrt{b^2-3c}\right] \geq x_{\max} \geq \frac{1}{3}\left[-b+\sqrt{b^2-3c}\right]$

$$\rightarrow \qquad \frac{1}{3}[11.5+2 \bullet 4.9244] \geq x_{\max} \geq \frac{1}{3}[11.5+4.9244]$$

$$\rightarrow \qquad 7.1163 \geq x_{\max} \geq 5.4748$$

7. Определим $-\frac{1}{27}\left[-2b^3-9bc-(6c-2b^2)\sqrt{b^2-3c}\right] \geq d_i \geq -\frac{1}{27}\left[-2b^3-9bc+(6c-2b^2)\sqrt{b^2-3c}\right]$

$$\rightarrow \qquad -16.4969 \geq d_i \geq -34.1883.$$

Утверждение 2 " Для уравнения вида $x^3+bx^2+cx+d=0$
если все три корня x_1, x_2, x_3 являются действительными, то все они находятся в области

$$\frac{1}{3}\left[-b+2\sqrt{b^2-3c}\right] \geq x_i \geq \frac{1}{3}\left[-b-2\sqrt{b^2-3c}\right] \qquad (15)$$

где i=1,2,3 при этом значение d будет находиться в пределах

$$-\frac{1}{27}\left[-2b^3-9bc-(6c-2b^2)\sqrt{b^2-3c}\right] \geq d_i \geq -\frac{1}{27}\left[-2b^3-9bc+(6c-2b^2)\sqrt{b^2-3c}\right] \qquad (16)$$

а корни в областях

$$\frac{1}{3}\left[-b-2 \bullet \sqrt{b^2-3c}\right] \leq x_{\min} \leq \frac{1}{3}\left[-b-\sqrt{b^2-3c}\right] \qquad (17)$$

$$\frac{1}{3}\left[-b-\sqrt{b^2-3c}\right] \leq x_{сред} \leq \frac{1}{3}\left[-b+\sqrt{b^2-3c}\right] \qquad (18)$$

$$\frac{1}{3}\left[-b+\sqrt{b^2-3c}\right] \leq x_{\max} \leq \frac{1}{3}\left[-b+2 \bullet \sqrt{b^2-3c}\right] \qquad (19)$$

“ .

Вывод 9. Использование преобразования по формуле (1) приводит к формулам определяющих интервалы допустимых действительных значений нулей и свободного члена исходного кубического уравнения.
На основании одной из формул (17), (18), (19) можно составить алгоритм решения кубического уравнения .

Алгоритмы решения кубического уравнения

1. Метод бинарного приближения

Для реализации алгоритма решения кубического уравнения можно использовать любое из уравнений (17), (18), (19).
Метод бинарного приближения заключается в том, что

1. Рассматриваемый интервал возможных значений x постоянно делится на две равные части.
2. В каждой из частей выбирается по одному из любых значений - x_1, x_2 .
3. Решается исходное уравнение при $x = x_1$ и определяется значение d_1.
4. Решается исходное уравнение при $x = x_2$ и определяется значение d_2.
5. Для дальнейшего приближения используется тот интервал, для которого значение d_i ближе к значению d исходного уравнения.
6. Для полученного в п.5 интервала повторяются расчеты по п.п. 1- 5.

Такие итерационные расчеты проводятся до момента совпадения значений $d_i = d$.

(см. ПРИЛОЖЕНИЕ)

Обратное преобразование

Использование системы mn параметров создает возможность реализации обратной задачи.

Обратная задача “Задано квадратное уравнения, являющиеся mn преобразованиями кубического уравнения. Необходимо определить исходное кубическое уравнение.“

Решение

Преобразование mn для кубического уравнения имеет вид (см. уравнение (7))

$$(2mn)^2 + (3x + b)\cdot 2mn + 3x^2 + 2bx + c = 0 , \qquad (7)$$

где 2mn - разность любой пары корней исходного кубического уравнения
x - любой корень исходного кубического уравнения.

Для трех корней исходного уравнения можно составить следующие разности

$$(2mn)_1 = |x_1 - x_2| , (2mn)_2 = |x_1 - x_3| , (2mn)_3 = |x_2 - x_3|.$$

Обратим внимание на то, что $\mathbf{(2mn)_1 - (2mn)_2 = (2mn)_3}$. (20)

В примере 3 имели уравнение $\mathbf{X^3 - 11.5X^2 + 36X - 31.5 = 0.}$

Здесь b = -11.5, c = 36, d = - 31.5

Корнями этого уравнения являются $X_1 = 1.5$, $X_2 = 3$, $X_3 = 7$.

На основании уравнения (7)

$$\rightarrow (2mn)^2 + (3x - 11.5)\cdot 2mn + 3x^2 - 23x + 36 = 0 .$$

Подставим в это уравнение $x = 1.5 \rightarrow$ $\mathbf{(2mn)^2 - 7\cdot(2mn) + 8.25 = 0.}$

$\rightarrow$ $\mathbf{(2mn)_{1,2} = 3.5 \pm 2}$ $\rightarrow$ $\mathbf{(2mn)_1 = 5.5}$, $\mathbf{(2mn)_2 = 1.5}$

$\rightarrow$ $\mathbf{(2mn)_1 - (2mn)_2 = (x_3 - x_1) - (x_2 - x_1) = (x_3 - x_2) = 5.5 - 1.5 = 4}$

$$\rightarrow \qquad \mathbf{(2mn)_1 - (2mn)_2 = (2mn)_3}\,. \qquad (20)$$

Вывод 10. На основании решения квадратного уравнения с действительными значениями корней можно определить три разности корней родственного кубического уравнения.

Продолжим рассмотрение примера 3

Обратимся к уравнению (13)

$$L^3+2(3c-b^2)L^2+(3c-b^2)^2L+\frac{4(3c-b^2)^3-(2b^3-9bc+27d)^2}{27}=0, \qquad (13)$$

где $\mathbf{L=(2mn)^2=(x_i-x_j)^2}$

$\rightarrow \mathbf{L_1 = (2mn)_1^2 = (x_1-x_2)^2,\ L_2 = (2mn)_2^2 = (x_1-x_3)^2,\ L_3 = (2mn)_3^2 = (x_3-x_2)^2}$

$\rightarrow \qquad \mathbf{L_1 = 2.25,\ L_2 = 30.25,\ L_3 = 16}$

Подставив значения $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{L_3}$, **получим три уравнения**

$$(2.25)^3+2(3c-b^2)\cdot(2.25)^2+(3c-b^2)^2\cdot(2.25)+\frac{4(3c-b^2)^3-(2b^3-9bc+27d)^2}{27}=0, \qquad (21)$$

$$(30.25)^3+2(3c-b^2)\cdot(30.25)^2+(3c-b^2)^2\cdot(30.25)+\frac{4(3c-b^2)^3-(2b^3-9bc+27d)^2}{27}=0, \qquad (22)$$

$$16^3+2(3c-b^2)\cdot 16^2+(3c-b^2)^2\cdot 16+\frac{4(3c-b^2)^3-(2b^3-9bc+27d)^2}{27}=0, \qquad (23)$$

где c,b,d –неизвестные коэффициенты кубического уравнения родственного исходному квадратному уравнению.

Решив эту систему из трех уравнений можно определить искомые значения c,b,d и тем самым определить кубическое уравнение родственное исходному квадратному уравнению, т. е. **решить поставленную обратную задачу**.

Вывод 11. Использование системы mn параметров реализует прямое и обратное преобразование степенных функций

Автор с благодарностью примет конкретные предложения, замечания и оценки.

E- Mail: **fgg-fil1@narod.ru**

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Продолжим рассмотрение примера 3.

Имеем интервал $\frac{1}{3}\left[-b+\sqrt{b^2-3c}\right] \geq x_{сред} \geq \frac{1}{3}\left[-b-\sqrt{b^2-3c}\right]$.

Для примера1 $\rightarrow$ $\frac{1}{3}\left[11.5+4.9244\right] \geq x_{сред} \geq \frac{1}{3}\left[11.5-4.9244\right]$

$\rightarrow$ $5.4748 \geq x_{сред} \geq 2.1919$.

1. Определяем среднее значение интервала 5.4748 – 2.1919 = 3.2829.
   Т.о. получили два интервальных отрезка
   $5.4748 \geq x_1 \geq 3.2829$ и $3.2829 \geq x_2 \geq 2.1919$
2. Пусть x_1 = (5.4748 + 3.2829)/2 = 4.3788
   Подставим это значение x в исходное уравнение

$\rightarrow$ $(4.3788)^3 - 11.5\cdot(4.3788)^2 + 36\cdot 4.3788 - d_1 = 0$

$\rightarrow$ $83.9586 - 220.4997 + 157.6368 - d_1 = 0$

$\rightarrow$ $d_1 = -21.1007$.

3. Пусть x_2 = (3.2829 + 2.1919)/2 = 2.7374
   Подставим это значение x в исходное уравнение

$\rightarrow$ $(2.7374)^3 - 11.5\cdot(2.7374)^2 + 36\cdot 2.7374 - d_2 = 0$

$\rightarrow$ $20.5123 - 86.1736 + 98.5464 - d_2 = 0$

$\rightarrow$ $d_2 = -32.8851$

4. В результате имеем значение d_2 = - 32.8851 более близкое к значению d = - 31.5, чем d_1 = - 21.1007. Поэтому, для дальнейшего приближения , используем интервалы x_1 = (3.2829 + 2.7374)/2 = 3.0101 и x_2 = (2.7374 +2.1919)/2 = 2.4646

5. Пусть x_1 = 3.0101
   Подставим это значение x в исходное уравнение

$\rightarrow$ $(3.0101)^3 - 11.5\cdot(3.0101)^2 + 36\cdot 3.0101 - d_1 = 0$

$\rightarrow$ $27.2736 - 104.1981 + 108.3636 - d_1 = 0$

$\rightarrow$ $d_1 = -31.4391$.

6. Пусть x_2 = 2.4646
   Подставим это значение x в исходное уравнение

$\rightarrow$ $(2.4646)^3 - 11.5\cdot(2.4646)^2 + 36\cdot 2.4646 - d_2 = 0$

$\rightarrow$ $14.9706 - 69.8539 + 88.7256 - d_2 = 0$

$\rightarrow$ $d_2 = -\ 33.8423.$

7. В результате имеем значение $d_1 = -\ 31.4351$ более близкое к значению $d = -\ 31.5$, чем $d_2 = -\ 33.8423$. Поэтому, для дальнейшего приближения используем интервалы $x_1 = (\ 3.2829 + 3.0101)/2 = 3.1465$ и $x_2 = (\ 3.0101 + 2.1919)/2 = 2.601$. Значение x_2 далее рассматривать не будем.
8. Пусть $x_1 = 3.1465$

Подставим это значение x в исходное уравнение

$\rightarrow$ $(3.1465)^3 - 11.5\cdot(3.1465)^2 + 36\cdot 3.1465 - d_1 = 0$

$\rightarrow$ $31.1518 - 113.8553 + 113.274 - d_1 = 0$

$\rightarrow$ $d_1 = -\ 31.1518.$

. 9. Поэтому, для дальнейшего приближения используем интервалы

$x_1 = (\ 3.2829 + 3.1465)/2 = 3.2147$ и $x_2 = (\ 3.1465 + 3.0101\ )/2 = 3.0783$

.

10. 8. Пусть $x_2 = 3.0783$

Подставим это значение x в исходное уравнение

$\rightarrow$ $(3.0783)^3 - 11.5\cdot(3.0783)^2 + 36\cdot 3.0783 - d_2 = 0$

$\rightarrow$ $29.1697 - 108.9732 + 110.8188 - d_2 = 0$

$\rightarrow$ $d_2 = -\ 31.0153$

11. Поэтому, для дальнейшего приближения используем интервалы

$x_1 = (\ 3.1465 + 3.0783)/2 = 3.1124$ и $x_2 = (\ 3.0783 + 3.0101\ )/2 = 3.0442$

Теперь надо рассматривать подобным образом интервалы

$x_2 = (\ 3.0442 + 3.0101\ )/2 = 3.02715$

$x_2 = (\ 3.02705 + 3.0101\ )/2 = 3.01436$

$x_2 = (\ 3.01436 + 3.0101\ )/2 = 3.0123$

$x_2 = (\ 3.0123 + 3.0101\ )/2 = 3.0111$

$x_2 = (\ 3.0111 + 3.0101\ )/2 = 3.0106$

$x_2 = (\ 3.0106 + 3.0101\ )/2 = 3.0103$

$x_2 = (\ 3.0103 + 3.0101\ )/2 = 3.0102$

$x_2 = (\ 3.0102 + 3.0101\ )/2 = 3.0101$

$x_2 = (\ 3.0101 + 3.0101\ )/2 = 3.01$ и т.д.

После ряда дополнительных итераций окончательно получим $x_1 = 3$. Это одно из решений исходного уравнения . Теперь можно получить и другие решения $x_2 = 1.5$ и $x_3 = 7$. Для реализации рассмотренного алгоритма следует составить программу, например, в MathCad.

2. Метод приближения к выражению $(4b^2 - 12c) \geq 3(2mn)^2$.

Этот метод основан на сужении интервала возможных действительных значений путем задания значений параметра 2mn.

С одной стороны формула $\frac{1}{3}\left[-b + \sqrt{b^2 - 3c}\right] \geq x_{сред} \geq \frac{1}{3}\left[-b - \sqrt{b^2 - 3c}\right]$

определяет интервал для значений $x_{сред}$.

С другой стороны формула $x_{1,2} = -\frac{1}{6}\left[2b + 3(2mn) \pm \sqrt{4b^2 - 3(2mn)^2 - 12c}\right]$

ограничивает значения для 2mn.

1. Пусть x = $\frac{1}{3}\left[-b+\sqrt{b^2-3c}\right]$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{3}\left[-b+\sqrt{b^2-3c}\right] = -\frac{1}{6}\left[2b+3(2mn)\pm\sqrt{4b^2-3(2mn)^2-12c}\right]$$

$$\rightarrow \quad -2b+2\sqrt{b^2-3c} = -2b+3(2mn)\pm\sqrt{4b^2-3(2mn)^2-12c}$$

$$\rightarrow 2\sqrt{b^2-3c} + 3(2mn) = \pm\sqrt{4b^2-3(2mn)^2-12c}$$

$$\rightarrow 4(b^2-3c) + 12(2mn)\cdot\sqrt{b^2-3c} + 9(2mn)^2 = 4b^2 - 3(2mn)^2 - 12c \rightarrow 2mn = -\sqrt{b^2-3c}.$$

2. Пусть x = $\frac{1}{3}\left[-b-\sqrt{b^2-3c}\right]$, аналогично получим $2mn = \sqrt{b^2-3c}$

→ **Для интервала $x_{сред}$ имеем** $2mn = \pm\sqrt{b^2-3c}$.

Для применения метода бинарного приближения достаточно ограничиться интервалом

$$0 \le 2mn \le \sqrt{b^2-3c}.$$

Продолжим рассмотрение примера 3

Определим $\sqrt{b^2-3c} = \sqrt{11.5^2-3\bullet 36}$.= 4.9244 /2 = 2.4622 → **имеем 2 интервала**

0 ≤ 2mn ≤ 2.4622 , 2.4622 ≤ 2mn ≤ 4.9244

Зададим 2mn равное среднему значению интервала

1. Пусть 2mn = 2.4622/2 = 1.2311

$$\rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{6}\left[2b+3(2mn)\pm\sqrt{4b^2-3(2mn)^2-12c}\right]$$

$$\rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{6}\left[-23+3\bullet 1.2311\pm\sqrt{529-3\bullet(1.2311)^2-432}\right] = -\frac{1}{6}\left[-19.3067\pm 9.6595\right]$$

$$\rightarrow x_1 = 1.6079, \quad x_2 = 4.8277$$

Теперь имеем 2 интервала 0 ≤ 2mn ≤ 1.2311 , 1.2311 ≤ 2mn ≤ 2.4622

2. Пусть 2mn = 1.2311/2 = 0.6155

$$\rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{6}\left[2b+3(2mn)\pm\sqrt{4b^2-3(2mn)^2-12c}\right]$$

$$\rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{6}\left[-23+3\bullet 0.6155\pm\sqrt{529-3\bullet(0.6155)^2-432}\right] = -\frac{1}{6}\left[-21.1535\pm 9.791\right]$$

$$\rightarrow x_1 = 1.8937, \quad x_2 = 5.1574$$

3. Пусть 2mn = 3.0777

$$\rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{6}\left[2b+3(2mn)\pm\sqrt{4b^2-3(2mn)^2-12c}\right]$$

$$\rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{6}\left[-23+3\bullet 3.0777\pm\sqrt{529-3\bullet(3.0777)^2-432}\right] = -\frac{1}{6}\left[-13.7669\pm 8.2815\right]$$

$$\rightarrow x_1 = 0.9142, \quad x_2 = 3.6747$$

и т.д. до получения решения исходного уравнения.

Для реализации рассмотренного алгоритма следует составить программу, например, в MathCad.

Вывод Интервалы допустимых действительных значений нулей и параметра (2mn) могут использоваться для определения нулей исходного уравнения, например, с помощью алгоритма бинарного приближения.